目　　录

第1章 初等代数

实验一 数的运算

问题：

数的运算是数学运算的基础，打好用 Maple 语句进行数的计算的基础，不但有利于理解 Maple 的数学计算，也同样有利于理解其他软件的数学计算，基础性的工作是不容忽视的。

实验目的：

在 Maple 环境下进行对实数的近似计算和精确计算、近似值和精确值的相互转化；学会整数、复数的有关计算；利用序列、串行、集合的概念进行关于数列的计算。

实验准备：

1. Maple 简介

Maple 是 1980 年由加拿大 Waterloo 大学开发出来的数学计算软件，经过多年的研究测试，Maple 已经发展成为相当成熟的数学软件，在处理各种计算时不仅可以求出数值解，还具有优秀的符号计算功能，方便快捷的二维、三维作图功能是它的另一特色。本书仅围绕数学课程的基本运算列举 Maple 命令及用法，如果读者需要了解更多的信息，除了检索附录 A，还可以通过 Maple 提供的在线帮助系统来查询，或访问 http://www.maplesoft.com 来解决。

2. Maple 安装和启动

Maple 软件安装如下：

(1) 将光盘插入光驱；

(2) 在光盘的根目录下找到 Maple7 的安装文件 setup.exe；

(3) 用鼠标双击该安装文件，按提示逐步安装；

(4) 安装完成后，在程序栏里就有了 Maple7 选项。

选择“开始”→“程序”→“Maple7”，便出现了 Maple7 的命令窗口，只要单击桌面上的 Maple 图标，即可出现工作区，在工作区的提示符“>”后输入算式就可以进行数字计算。

Maple 以界面友好而著称。Maple 对运算做如下分类：数值运算和符号运算，我们仍沿用数学课的习惯，分别称为：数的运算和式的运算，实验一介绍数的运算，实验二介绍式的运算。

3. 数值运算的概念

凡是满足整系数代数方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 的数都称为代数数，不是代数数的数就是超越数。我们也可以按某数是否是整系数代数方程的根，把数作如下分类：

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{实代数数}\\\text{实超越数}\end{cases}\\\text{虚数}\end{cases}$$

“超越数”这一名词是欧拉首先引入的，意思是“超越代数方法的能力”得到的数。例如：-2、$\frac{5}{3}$、$\sqrt{2}$、$\sin\frac{\pi}{6}$ 等都是代数数，而π、e、sin 2 等都是超越数。代数无理数和超越数都是无限不循环小数，而计算机所表示的有效数字的位数总是有限的，加上实际问题中往往没有必要或没有可能得出精确的计算结果，这样不可避免地产生了近似计算。

我们把整数和诸如 $\sqrt{2}$、3/5、sin 2、e、π 的数称为精确数。如果数值运算的结果为一个精确数，我们称这种运算为精确运算。一些运算结果不可能或没有必要得到精确值，而用近似数表示，称这种运算为近似运算。这里我们把精确运算和近似运算统称为数值运算。

为了进一步研究数的运算，我们先来熟悉 Maple 中有关的符号。

4. Maple 中有关符号及命令

Maple 关于数的关系符号和基本运算符号，如表 1.1 所示。

表 1.1 关系符号和运算符号

运算符号	关系符号	运算符号	关系符号
=	等于	+	加
<>	不等于	-	减
<	小于	*	乘
>	大于	/	除
<=	小于或等于	**	乘方
>=	大于或等于	sqrt()	开方

$a+a$ 比 $2a$，$x*x$ 比 x^2，0.5*k 比 $\frac{k}{2}$ 要节省运算时间，而“+、-、*、/、^”都是计算机能直接执行的运算，这些运算耗时少，计算机上不能直接执行的运算较多，常见的有开方运算、超越函数运算、极限运算、微积分运算，在计算时我们要充分利用耗时少的运算。

有些常数在 Maple 中的表达与习惯的不一样，在计算时要特别注意。

1) Maple 中的数学常数

Pi	π (π ≈3.141592654);
exp(1)	E 或 e (e≈2.718281828);
infinity	∞(无穷大);
I	虚数 i (i=$\sqrt{-1}$);

sqrt(2)　　　　　$\sqrt{2}$。

Maple 用 E 或 e 来表示 10 的若干次幂，例如：0.652E8 或 0.652e8 表示 0.652×10^{8}。

Maple 把用小数或科学记数法的形式表示的数叫浮点数。

2）确定浮点数精度的命令

evalf(num)　　　　　把精确数 num 化成浮点数，默认 10 位有效数字；

evalf(num，n)　　　　把精确数 num 化成具有 *n* 位有效数字的浮点数，默认 10 位有效数字；

Digits　　　　　　　浮点数的精确度，默认值为 10 位有效数字；

Digits:=n　　　　　　设定浮点数有 *n* 位有效数字。

这里，前两个命令是函数命令，函数命令后面有“()”；后面两个命令是系统变量，系统变量的第一个字母要大写。注意 Maple 是区分大小写的，例如 Digits 与 digits 是两个不同的变量。

把分数转化成浮点数，可用命令 evalf()来完成，反之把浮点数转换成近似分数可以用命令 convert()完成。

3）浮点数转换分数的命令

convert(float，rational)：　　将浮点数 float 转换成近似分数，默认精度为 10 个位数的有效数字。

convert(float，rational，n)：　将浮点数 float 转换成具有 *n* 个位数有效数字的近似分数。

实验演示：

例 1　说出下列各语句的计算式是近似计算还是精确计算。

(1)　> 2+3;

$$5$$

(2)　> 2+3.;

$$5.$$

(3)　①> sqrt (2);

$$\sqrt{2}$$

②> evalf(sqrt(2));

$$1.414213562$$

(4)　> 20/3-2;

$$\frac{14}{3}$$

(5)　>sqrt (8);

$$2\sqrt{2}$$

(6)　> exp(2/3);

$$e^{(2/3)}$$

(7) > evalf(%);

1.947734041

(8) > (a+2)*3;

$$3a + 6$$

解：(2)、(3) 中的②、(7)是近似计算，其余的是精确计算，其中(8)也叫符号计算，Maple擅长于符号计算。

每条完整的Maple语句后面要以“;”或“:”结尾，如果没有结尾符号，Maple将一直等待，直到遇到结尾符号才结束当前语句，显示运算结果。

以上计算表明：一般情况下Maple作精确计算，只有得到指令才把结果用小数作近似表达，或计算式中原来就有小数参加运算，结果也会以小数作近似表达。

例2　求下列各题的20位浮点数。

(1) π；　(2) 100!；　(3) e；　(4) 2^{100}。

解：

> Digits:=20;

Digits := 20

(1) > evalf (Pi);

3.1415926535897932385

(2) > evalf(100!);

$.93326215443944152682\quad 10^{158}$

> Digits:=10;　　　# 改回系统默认精确度

Digits := 10

> Digits;

10

使用命令“Digits:=”后要把系统默认的精确度再改回来，一般不要改变系统的默认值。(3)、(4)两题由读者自己完成。

例3　将下列各数转换成具有12位有效数字的近似分数。

(1) π；　(2) e;　(3) $\sqrt{2}$。

解：

> Digits:=12;

Digits := 12

(1) > evalf (Pi);

3.14159265359

> convert(%，rational，12);

$$\frac{312689}{99532}$$

(2)、(3)由读者完成。

4) 整数、复数的运算

Maple 关于整数、复数的运算命令如下：

- igcd(x1，x2，…)：求出 $x1$，$x2$，…的最大公因子；
- ilcm(x1，x2，…)：求出 $x1$，$x2$，…的最小公倍数；
- ifactor(n)：把整数 n 分解质因数；
- I：虚数单位；
- length：计算某个数的长度；
- conjugate(z)：复数 z 的共扼复数；
- Re(z)、Im (z)：复数 z 的实部、虚部；
- expand：展开计算；
- argument(z)：求复数 z 的辐角；
- abs(z)：复数 z 的模；
- evalc：求复数表达式的值；
- simplify：化简数或式的计算结果；
- convert：小数与分数之间的转换、表达式的转换……；
- rand()：产生 12 个位数的随机整数；
- rand(a..b)()：产生 a 到 b 之间的随机整数；
- iquo(m,n, 'r')：计算 m/n 的整数商，并将余数存于变量 r 中。

例 4　解答下列各题。

(1) 3^{200}是多少位整数？用 20 位浮点数表示它。

(2) 求 246，348，624 的最大公约数、最小公倍数，并把最小公倍数进行质因数分解。

(3) 求 p=rand()，q=rand(1..9)()，并求 p 与 q 的商及余数。

(4) 求(2+3i)(5+2i)的实部、虚部系数、模和辐角。

解：

(1)
```
> 3^200;
  265613988875874769338781322035779626829233452653394495974574961739\
  0924909013028299438469904 4001
> length(%);
                              96
```
3^{200} 是 96 位整数；
```
> evalf(%%);               #系统默认 10 位有效数字
                      .2656139889   10^96
> evalf(3^200，20);
                  .26561398887587476934   10^96
```
(2)
```
> igcd(246，348，624);
                              6
```

```
> ilcm(246, 348, 624);
```

$$741936$$

```
> ifactor(%);
```

$$(2)^4(3)\,(13)\,(29)\,(41)$$

(3)
```
> p:=rand();
```

$$p{:=}343633073697$$

```
> q:=rand(1..9)();
```

$$q{:=}6$$

```
> iquo(p, q, 'r');
```

$$57272178949$$

$$3$$

即商为 57272178949，余数为 3。

(4)
```
> (2+3*I)*(5+2*I);
```

$$4+19I$$

```
> Re(%), Im(%);
```

$$4,19$$

```
> abs(%%);
```

$$\sqrt{377}$$

```
> conjugate(2+3*I)*(5+2*I);
```

$$16-11I$$

```
> argument(%);
```

$$-\arctan\left(\frac{11}{16}\right)$$

```
> evalc((2+3*I)*(5+2*I));
```

$$4+19I$$

5) 序列、串行与集合

序列(sequences)、串行(lists)与集合(sets)是重要的数据类型，多了解它们有助于多种运算的表达及运算结果的表达。

序列是用逗号把一系列的数字或表达式隔开而形成的一种数据类型，元素是有次序的、可重复的；序列的一个重要用途是可以把它当成函数的自变量。把序列用[]括起来就成为串行(list)。

把序列用{}括起来就成为集合(set)。集合里的元素仍然具有确定性、互异性和无序性。

例 5　说出下列数据类型。

解：

(1) > (2*a，b^3，sin(5*x));

$$2a, b^3, \sin(5x)$$

(2) >7，4，5，5，3;

$$7, 4, 5, 5, 3$$

(3) > [%];

$$[7, 4, 5, 5, 3]$$

(4) > {%%};

$$\{3, 4, 5, 7\}$$

(1)、(2)是序列，(3)是串行，(4)是集合，从中我们清楚地看到这三者中元素性质的区别。

 **注意：** Maple 总是把集合中的元素从小到大排列起来。

下面是关于序列、串行与集合的运算命令：

seq(f(i)，i=m..n)　　产生序列 $f(i)$，其中 i 从 m 取到 n；

add(f(i)，i=m..n)　　计算 $\sum_{i=m}^{n} f(i)$；

mul(f(i)，i=m..n)　　计算 $\prod_{i=m}^{n} f(i)$。

以上三个命令中 m、n 均是正整数，当 m、n 中有字母时 add()、mul()要相应地改为 sum()和 product()。

add(i，i=[a1，a2，…，an])　　计算 $a1+a2+\cdots+an$；

mul(i，i=[a1，a2，…，an])　　计算 $a1\times a2\times a3\times\cdots\times an$。

例 6　已知数列：$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{4}{16}$，…，请你把这个数列的前 10 项写成序列、串行和集合，再求：

(1) $s_{10}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$；

(2) $s_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k$；

(3) $p_{10}=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_{10}$；

(4) $p_k=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k$。

解：数列的通项公式为 $f(n)=\frac{n}{2^n}$，由序列运算的命令得：

> seq(i/(2^i)，i=1..10);　#求出序列：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{8},\frac{1}{4},\frac{5}{32},\frac{3}{32},\frac{7}{128},\frac{1}{32},\frac{9}{512},\frac{5}{512}$$

> al:=[%];　　#写出串行：

$$al:=\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{8},\frac{1}{4},\frac{5}{32},\frac{3}{32},\frac{7}{128},\frac{1}{32},\frac{9}{512},\frac{5}{512}\right]$$

> s:={%%}; #写出集合：

$$s := \left\{\frac{1}{2}, \frac{9}{512}, \frac{5}{512}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \frac{3}{32}, \frac{7}{128}, \frac{1}{32}\right\}$$

(1) > add(i/(2^i)，i=1..10);

$$\frac{509}{256}$$

这是求序列的和，下面再求串行的和：

> add(i，i=[%%]);

$$\frac{509}{256}$$

(2) > add(i/(2^i)，i=1..k);

Error， unable to execute add

“add”只进行数值求和，由于该语句 i 的取值范围已属于符号运算，所以出错，需在 Maple 中对运算作如下分类改用“sum”命令求和。

> sum(i/(2^i)，i=1..k);

$$-2\left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)}(k+1) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)} + 2$$

> simplify(%);

$$-2^{(-k)}k - 2^{(1-k)} + 2$$

和求得对不对呢？我们做个实验：

> f:=k->-2^(-k)*k-2^(1-k)+2;

$$f := k \rightarrow -2^{(-k)}k - 2^{(1-k)} + 2$$

> f(10);

$$\frac{509}{256}$$

这个和与用“add”命令求出的和是一致的，所以 $S_k = -2^{(-k)}k - 2^{(1-k)} + 2$。

现在，无论你是否知道数列的通项，都可以很快地求出数列的和与积了。(3)和(4)两题留给读者完成。

实验二　式 的 运 算

问题：

为了顺利地利用计算软件学习以后各章的相关内容，先要学会基本的代数式运算。由于 Maple、Mathcad、Matlab 及 Mathematica 的基本代数运算的命令一般是用相应的英语词汇，所以基本运算的命令一般也是一样的，本章介绍过的运算，以后我们在后续各章中不

再介绍了。

实验目的：

在 Maple 环境下会进行整式、分式的化简、因式分解、化分式为部分分式的形式等常见代数式运算；会解方程(组)、不等式(组)。

实验准备：

作为数学计算软件，Maple 最突出的特点就是能够进行符号运算，也就是让计算机能像人一样进行数字、字母甚至带参变量代数式的运算，使得到的结果是准确值，当然根据需要也可以是近似值。

我们可以用符号“:=”对变量赋值，变量的值可以是数字、字符或表达式。

下面是多项式运算中常用的命令：

expand(expr)：　将表达式 expr 展开；
collect(expr，x)：　将 expr 合并同类项；
sort(poly)：　降幂排列多项式各项；
factor(expr)：　将 expr 因式分解；
simplify(expr)：　将 expr 化简；
simplify(expr，n1,n2,…)：　将 expr 按指定的函数类别化简。
指定的函数类别有：
trig—：　三角函数；
radical—：　指数为分数的数或函数；
power—：　指数函数(或含 ln 与 exp 的函数)；
simplify(expr，siderel)：　根据关系式 siderel 将 expr 化简；
simplify(expr，assume=prop)：　依据假设 assume 来化简；
simplify(expr，symbolic)：　化简含有根号的式子而不管根号里变量的正负问题；
tcoeff(ploy)：　找出多项式 ploy 里最低次项的系数；
tcoeff(ploy,x)：　以 x 为未知数，找出多项式 ploy 里最低次项的系数；
coeff(poly,var,)：　查看多项式中变量 var 项的系数；
coeffs：　查看多项式所有项的系数；
numer：　求有理式的分子。

实验演示：

例 1　把多项式 $x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8$

(1)　按 x 降幂排列；

(2)　按 x 合并同类项；

(3)　在实数域内因式分解。

解：

(1)　> sort(x^2-4*x*y+4*y^2-6*x+12*y+8,x);

$$x^2-4yx-6x+4y^2+12y+8$$

(2)　> collect(%,x);

$$x^2+(-6-4y)x+12y+8+4y^2$$

(3) > factor(%);

$$(x-2-2y)(x-4-2y)$$

例 2　设$f(x)=2x^5+x^4+3x^3-x^2+x-6$，$g(x)=2x^4-3x^2+6x^3-2x+9$。

(1) 求 $h(x)$，使 $h(x)=3f(x)+2g(x)$；

(2) 求$f(x)$与 x^2+x-2 的最大公因式；

(3) 求$p(x)$，使 $p(x)=g(x)\cdot h(x)$，再把$p(x)$因式分解；

(4) 不展开积式，求 $f(x)\cdot g(x)$ 的首项、尾项、各项系数及降幂排列的多项式。

解：

(1) > f:=sort(3*x^3+2*x^5-x^2+x^4-6+x);

$$f:=2x^5+x^4+3x^3-x^2+x-6$$

> g:=sort(2*x^4-3*x^2+6*x^3-2*x+9);

$$g:=2x^4+6x^3-3x^2-2x+9$$

> h:=3*f+2*g;

$$h:=6x^5+7x^4+21x^3-9x^2-x$$

(2) > gcd(f,x^2+x-2);

$$x-1$$

(3) > p(x):=g*h;

$$\mathrm{p}(x):=(2x^4+6x^3-3x^2-2x+9)(6x^5+7x^4+21x^3-9x^2-x)$$

> sort(expand(%));

$$12x^9+50x^8+66x^7+75x^6-79x^5+42x^4+210x^3-79x^2-9x$$

> factor(%);

$$x(6x^4+7x^3+21x^2-9x-1)(2x^4+6x^3-3x^2-2x+9)$$

(4) 求首项系数正确的命令输入：

>coeff(f*g,x,q)

$$4$$

求尾项系数的命令输入：

> tcoeff(f*g);

$$-54$$

求第六项的系数：

> coeff(f*g,x,6);

$$9$$

求多项式中各项的系数：

> coeffs(expand(f*g));

$$-54,21,7,-10,3,4,14,6,9$$

将多项式按降幂排列：

```
> sort(expand(f*g));
```

$$4x^9+14x^8+6x^7+9x^6+3x^5-10x^3+7x^2+21x-54$$

例 3　把(x^2+3x−2)(x^2+3x+4)−16 分别在实数域、复数域内因式分解。

解：解题过程如下：

```
> expand((x^2+3*x-2)*(x^2+3*x+4)-16);
```

$$x^4+6x^3+11x^2+6x-24$$

```
> factor(%);
```

$$(x-1)(x+4)(x^2+3x+6)$$

```
> factor(%,complex);
```

$$(x+4.000000000)(x+1.500000000+1.936491673I)$$
$$(x+1.500000000-1.936491673I)(x-1.000000000)$$

例 4　$(1-4x+4x^2)^{10}= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{20}x^{20}$

求：

(1)　a_2 和 a_9；

(2)　求展开式各项的系数；

(3)　求各系数所对应的多项式元素；

(4)　按降幂排列展开该二项式，并与(2)、(3)对照各项的分布。

解：

(1)
```
> y:=(1-4*x+4*x^2)^10;
```

$$y:=(1-4x+4x^2)^{10}$$

```
> coeff(y,x^2),coeff(y,x^9);
```

$$760,-85995520$$

(2)
```
> coeffs(expand(y),x,'powers'); #求展开式各项的系数
```

1,317521920,−508035072,−635043840,635043840,49807360,−149422080,−40,
−10485760,1048576,760,−9120,77520,32248320,−9922560,2480640,−496128,
18919044,−85995520,515973120,−343982080

(3)
```
> powers;  # 求各系数所对应的多项式元素
```

$$1,x^{16},x^{15},x^{13},x^{14},x^{18},x^{17},x,x^{19},x^{20},x^2,x^3,x^4,x^8,x^7,x^6,x^5,x^{10},x^9,x^{12},x^{11}$$

(4)
```
> sort(expand((1-4*x+4*x^2)^10));
```

$$1048576x^{20}-10485760x^{19}+49807360x^{18}-149422080x^{17}+31752920x^{16}$$
$$-508035072x^{15}+635042840x^{14}-635043940x^{13}+515973120x^{12}$$
$$-343982080x^{11}+189190144x^{10}-85995520x^9+32248320x^8-9922560x^7$$
$$+2480640x^6-496128x^5+77520x^4-9120x^3+760x^2-40x+1$$

分式运算的常用命令：

numet： 取出分式的分子；

denom： 取出分式的分母；

normal： 约去分子和分母的公因式；

convert(p(x), 'parfrac', x)： 把多项式 $p(x)$ 化为部分分式的形式。

例 5

(1) 化简：$\dfrac{2x+4}{x^2-4x+4}\div\dfrac{x^3+8}{2x-4}\cdot(x^2-4)$；

(2) 化简：$\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$；

(3) 把 $\dfrac{x^2-x+2}{2x^4+5x^3-14x^2+2x+5}$ 化为部分分式的形式。

解：

(1)
```
>y1:=(2*x+4)/(x^2-4*x+4);
y2:= ((x^3+8)/(2*x-4));
y3:=(x^2-4);
```

$$y1:=\frac{2x+4}{x^2-4x+4}$$

$$y2:=\frac{x^3+8}{2x-4}$$

$$y3:=x^2-4$$

```
> (y1/y2)*y3;
```

$$\frac{(2x+4)(2x-4)(x^2-4)}{(x^2-4x+4)(x^3+8)}$$

```
> simplify(%);
```

$$4\frac{x+2}{x^2-2x+4}$$

(2)
```
> (x^2+3*x+2)/(x^2+5*x+6);
```

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$$

```
> normal(%);
```

$$\frac{x+1}{x+3}$$

或者：

> simplify(%%); “%%”表示对上两个运算结果作运算，“%%%”表示对上三个运算结果作运算。

$$\frac{x+1}{x+3}$$

(3)　> f(x):=(x^2-x+2)/(2*x^4+5*x^3-14*x^2+2*x+5);

$$f(x):=\frac{x^2-x+2}{2x^4+5x^3-14x^2+2x+5}$$

> convert(f(x),'parfrac',x);

$$-\frac{2}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{22}{75}}{2x+1}+\frac{\frac{1}{25}(70+13x)}{x^2+3x-5}$$

把分式化为部分分式的方法很重要，以后可以使有理函数的积分大大化简。三角函数式的化简，Maple 并无通法，一般视情况灵活地采用以下命令：combine(expr,trig)，convert(expr,trig)，simplify(expr)。

例 6　化简：$\dfrac{3-4\cos 2a+\cos 4a}{3+4\cos 2a+\cos 4a}$。

解：

> x1:=3-4*cos(2*a)+cos(4*a);x2:=3+4*cos(2*a)+cos(4*a);

$$x1:=3-4\cos(2a)+\cos(4a)$$

$$x2:=3+4\cos(2a)+\cos(4a)$$

> x1/x2;

$$\frac{3-4\cos(2a)+\cos(4a)}{3+4\cos(2a)+\cos(4a)}$$

> combine(%,trig);

$$\tan(a)^4$$

实验三　解方程(组)和不等式(组)

问题：

解方程(组)、不等式(组)是解决数学问题的常用方法。线性方程组的一般解法在第 9 章中有介绍，其他各类方程(组)的求解没有一般的方法。本实验中我们只学习用 Maple 软件求方程(组)、不等式(组)的数值解或符号解的一般方法。

实验目的：

会用 Maple 命令求方程(组)、不等式(组)的数值解或符号解。

实验准备：

解方程或方程组的 Maple 命令为：

lhs=rhs:　　　　　　方程式；

solve(eqn,var)：　求解方程 *eqn* 里的未知数 *var*；

solve({eqn},var)：

或

solve(eqn,{var})：

或

solve({eqn},{var})：　这三个命令都是求方程 *eqn* 的解 *sol*，并把解表示为集合{var=sol}的形式；

solve({eqns},{vars})：　求方程组 *eqns* 的解，并把解表示为集合{var1=a,var2=b,…}的形式；

allvalues(expr)：　求出 RootOf()里所有可能的解；

allvalues(sols[i],'dependent')：独立显示方程的第 *i* 个解；

subs(var,eqns)：　把变量或变量的数值 *var* 带入方程组 *eqns* 的两边，得 *eqns* 左右两边的值；我们常用这个命令验根或验 *var* 解。

实验演示：

下面主要介绍方程或方程组的符号解(即精确解)的解法。

例 1　求下列方程或方程组的解析解。

(1) $5^x+5^{x-1}=750$;

(2) $15x^6-13x^5-73x^4-55x^3-86x^2+140x-24=0$;

(3) $x^4-3x+1=0$;

(4) $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ \sqrt{x-y}=x^2-y^2 \end{cases}$。

解：

(1) > solve(5^x+5^(x-1)=750,x);

$$\frac{\ln(625)}{\ln(5)}$$

> simplify(%);

$$4$$

即方程的解为 $x=4$。

(2) > solve(15*x^6-13*x^5-73*x^4-55*x^3-86*x^2+140*x-24=0);

$$-2,\frac{2}{3},3,\frac{1}{5},-\frac{1}{2}+I\sqrt{7},-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{7}$$

>solve(15*x^6-13*x^5-73*x^4-55*x^3-86*x^2+140*x-24=0,{x});

$$\{x=-2\},\{x=\frac{2}{3}\},\{x=3\},\{x=\frac{1}{5}\},\{x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{7}\},\{x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{7}\}$$

>solve({15*x^6-13*x^5-73*x^4-55*x^3-86*x^2+140*x-24=0},{x});

$$\{x=-2\},\{x=\frac{2}{3}\},\{x=3\},\{x=\frac{1}{5}\},\{x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{7}\},\{x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{7}\}$$

注意这里求解的不同的表达方法。一般 4 次以上的一元多项式方程不总有解析解，但在下面的例子中我们会看到在复数范围内 Maple 可以方便地求出一元 n 次方程的 n 个数值解。

(3)　> solve(x^4-3*x+1=0,{x});

$$\{x=\text{RootOf}(_Z^4-3_Z+1,\textbf{\textit{index}}=1)\},\{x=\text{RootOf}(_Z^4-3_Z+1,\textbf{\textit{index}}=2)\}$$

$$\{x=\text{RootOf}(_Z^4-3_Z+1,\textbf{\textit{index}}=3)\},\{x=\text{RootOf}(_Z^4-3_Z+1,\textbf{\textit{index}}=4)\}$$

> allvalues({x = RootOf(_Z^4-3*_Z+1,index = 1)});

$$\left\{x=\frac{1}{12}\sqrt{6}\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}-\frac{1}{12}\text{sqrt}\left(\left(\left(-6\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}-288\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}216\sqrt{6}(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}\right)\Bigg/\left((972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}\right)\right)\right)\right\}$$

> evalf(%);

$$\{x=.3376667660\}$$

> allvalues({x = RootOf(_Z^4-3*_Z+1,index = 2)});

$$\left\{x=\frac{1}{12}\sqrt{6}\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}-\frac{1}{12}\text{sqrt}\left(\left(\left(-6\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}-288\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}216\sqrt{6}(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}\right)\Bigg/\left((972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}\right)\right)\right)\right\}$$

> evalf(%);

$$\{x = 1.307486101\}$$

> allvalues({x = RootOf(_Z^4-3*_Z+1,index = 3)});

$$\left\{x=-\frac{1}{12}\sqrt{6}\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}+\frac{1}{12}I\mathrm{sqrt}\left(\left(6\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+288\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}216\sqrt{6}(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}\right)\Big/\left((972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}\right)\right)\right\}$$

> evalf(%);

$$\{x = -.8225764333 + 1.260317962I\}$$

> allvalues({x = RootOf(_Z^4-3*_Z+1,index = 4)});

$$\left\{x=-\frac{1}{12}\sqrt{6}\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}+\frac{1}{12}I\mathrm{sqrt}\left(\left(6\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+288\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}216\sqrt{6}(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}\right)\Big/\left((972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}\sqrt{\frac{(972+12\sqrt{5793})^{(2/3)}+48}{(972+12\sqrt{5793})^{(1/3)}}}\right)\right)\right\}$$

> evalf(%);

$$\{x = -.8225764333 - 1.260317962I\}$$

我们看到 Maple 恪守自己的诺言：原题中如果都是精确值，无论计算多么艰苦，解答中一定以精确值表示。当 solve()命令无法解出高次方程的解析解，解中会含有形如：RootOf(q(_Z)) 的解，其中 RootOf() 里的自变量是原先的方程式 q，“_Z”表示原先的自变量，对于这种解我们再用命令 allvalues(sols[i],‘dependent’)来化简各个解，化成数学上常见的解析解，也可以用命令“simplify(%,symbolic)”或“simplify(%,radical)”或“combine(%,radical)”或“convert(%,radical)”来化简形如“RootOf(q(_Z))”的解，得到解

析解。这些方法的精确度不尽相同，哪种精确度更好，读者可自己动手计算比较。

(4) > eqns:={x+y=0,x^2+y^2=1};

$$eqns := \{x + y = 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

> p:=solve(eqns,{x,y});

$$p := \{x = -\text{RootOf}(2_Z^2 - 1, label = _L1), y = -\text{RootOf}(2_Z^2 - 1, label = _L1)\}$$

> allvalues(%,'dependent');

$$\{y = \frac{1}{2}\sqrt{2}, x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\}, \{y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$$

我们用命令 subs(var,eqns)进行解的检验：

> subs([y1=(1/2)*sqrt(2),x1=-(1/2)*sqrt(2)],eqns);

$$\{0 = 0, 1 = 1\}$$

> subs([y2=-(1/2)*sqrt(2),x2=(1/2)*sqrt(2)],eqns);

$$\{0 = 0, 1 = 1\}$$

从最后两个语句我们看到(x, y)的两组值使方程左右两边相等，所以

$$\{y = \frac{1}{2}\sqrt{2}, x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\}, \{y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$$

都是方程组的解。

(5) > eqns:={x^2+y^2=1,sqrt(x-y)=x^2-y^2};

$$eqns := \{x^2 + y^2 = 1, \sqrt{x - y} = x^2 - y^2\}$$

> vars:={x,y};

$$vars := \{x, y\}$$

>sols:=solve(eqns,vars);

$$\begin{aligned}
sols := \{ & y = \text{RootOf}(4_Z^4 - 4_Z^3 - 2_Z^2 + 4_Z - 1, .3269928304), \\
& x = 4\text{RootOf}(4_Z^4 - 4_Z^3 - 2_Z^2 + 4_Z - 1, .3269928304)^3 \\
& - 3\text{RootOf}(4_Z^4 - 4_Z^3 - 2_Z^2 + 4_Z - 1, .3269928304) + 2 \\
& - 2\text{RootOf}(4_Z^4 - 4_Z^3 - 2_Z^2 + 4_Z - 1, .3269928304)^2\}, \\
& \{y = \text{RootOf}(4_Z^4 - 4_Z^3 - 2_Z^2 + 4_Z - 1, .8090169944 - .3930756889I), \\
& x = 4\text{RootOf}(4_Z^4 - 4_Z^3 - 2_Z^2 + 4_Z - 1, .8090169944 - .3930756889I)^3 \\
& - 3\text{RootOf}(4_Z^4 - 4_Z^3 - 2_Z^2 + 4_Z - 1, .8090169944 - .3930756889I) + 2 \\
& - 2\text{RootOf}(4_Z^4 - 4_Z^3 - 2_Z^2 + 4_Z - 1, .8090169944 - .3930756889I)^2\}, \\
& \{y = \text{RootOf}(2_Z^2 - 1), x = \text{RootOf}(2_Z^2 - 1)\}, \{y = 0, x = 1\}
\end{aligned}$$

观察这个解，知道其中有 4 个解，下面一个一个把它们表达出来：

> allvalues(sols[1],'dependent');

$$\{y=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{5}},x=4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}\right)^3+\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{3}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}$$
$$-2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}\right)^2\}$$

> s1:=simplify(%);

$$s1:=\{y=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}},x=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}\}$$

> allvalues(sols[2],'dependent');

$$\{x=4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{2-2\sqrt{5}}\right)^3+\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{2-2\sqrt{5}}$$
$$-2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{2-2\sqrt{5}}\right)^2,y=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{2-2\sqrt{5}}\}$$

> s2:=simplify(%);

$$s2:=\{y=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}I\sqrt{-2+2\sqrt{5}},x=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}I\sqrt{-2+2\sqrt{5}}\}$$

> s3:=allvalues(sols[3],'dependent');

$$s3:=\{y=\frac{1}{2}\sqrt{2},x=\frac{1}{2}\sqrt{2}\},\{y=-\frac{1}{2}\sqrt{2},x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\}$$

> s4:=allvalues(sols[4],'dependent');

$$s4:=\{y=0,x=1\}$$

$$sols:=\{y=0,x=1\},\{x=\mathrm{RootOf}(2_Z^2-1),y=\mathrm{RootOf}(2_Z^2-1)\},\{x=2$$
$$+4\mathrm{RootOf}(4_Z^4-4_Z^3-2_Z^2+4_Z-1,.3269928304)^3$$
$$-3\mathrm{RootOf}(4_Z^4-4_Z^3-2_Z^2+4_Z-1,.3269928304)$$
$$-2\mathrm{RootOf}(4_Z^4-4_Z^3-2_Z^2+4_Z-1,.3269928304)^2$$
$$y=\mathrm{RootOf}(4_Z^4-4_Z^3-2_Z^2+4_Z-1,.3269928304)\},\{x=2$$
$$+4\mathrm{RootOf}(4_Z^4-4_Z^3-2_Z^2+4_Z-1,.8090169944-.3930756889I)^3$$
$$-3\mathrm{RootOf}(4_Z^4-4_Z^3-2_Z^2+4_Z-1,.8090169944-.3930756889I)$$
$$-2\mathrm{RootOf}(4_Z^4-4_Z^3-2_Z^2+4_Z-1,.8090169944-.3930756889I)^2,$$
$$y=\mathrm{RootOf}(4_Z^4-4_Z^3-2_Z^2+4_Z-1,.8090169944-.3930756889I)\}$$

> s2:=allvalues(sols[2],'dependent');

$$s2:=\{x=\frac{1}{2}\sqrt{2},x=\frac{1}{2}\sqrt{2}\},\{x=-\frac{1}{2}\sqrt{2},x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\}$$

> convert(sols[3],radical);

$$\{x=\frac{5}{4}+4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}\right)^3+\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{3}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}$$
$$-2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}\right)^2,y=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}\}$$

\> s3:=simplify(%);

$$s3 := \{x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}, y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}\}$$

\> convert(sols[4],radical);

$$\{x = \frac{5}{4} + 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\sqrt{2-2\sqrt{5}}\right)^3 - \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4}\sqrt{2-2\sqrt{5}}$$

$$-2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\sqrt{2-2\sqrt{5}}\right)^2, y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{2-2\sqrt{5}}\}$$

\> s4:=simplify(%);

$$s4 := \{x = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}I\sqrt{-2+2\sqrt{5}}, y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}I\sqrt{-2+2\sqrt{5}}\}$$

\> s1,s2,s3,s4;

$$s_1, \{x = \frac{1}{2}\sqrt{2}, y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\}, \{x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\}$$

$$\{x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}, y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}\}$$

$$\{x = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}I\sqrt{-2+2\sqrt{5}}, y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}I\sqrt{-2+2\sqrt{5}}\}$$

现在我们看到了 Maple 的符号计算能力了吧，然而实际应用中往往没有必要求方程组的精确解，更何况即使方程有解，solve()命令未必总能求到这个解，特别当有方程解而求不出解时，Maple 不作任何返回，这一点我们必须给以足够的注意。

方程(组)的数值解：

用“solve”命令求方程 $\cos x = x$ 的解的结果如下：

\> solve(cos(x)=x,x);

$$\text{RootOf}(_Z - \cos(_Z))$$

当我们用“solve”命令无法得到方程的解时，我们可以尝试用“fsolve”命令求方程的近似值解，也叫数值解或浮点数解。fsolve()即 floating point，意为浮点数解。

\> fsolve(cos(x)=x,x);

$$.7390851332$$

即使用 fsolve()解高次多项式方程(组)或非多项式方程时，也不一定能一次解出全部解。所以最好的方法是先画出方程的图形，找出方程中根的大致位置，以这样的位置对应的数为初值求出解来。下面介绍相关的命令：

fsolve(eqn,vars)：	求以 *vars* 为变量的方程 *eqns* 的解；
fsolve(eqn,vars=x0)：	从 *vars*=*x*0 来搜寻 *eqn* 的解；
fsolve(eqn,vars=x0..x1)：	在 *x*0 到 *x*1 的范围内搜寻 *eqn* 的解；
fsolve(eqn,,vars,complex)：	在复平面求方程组的解。
resolve(eqns,f(n))：	指定函数为 *f*(*n*)，求迭代方程的解。

下面主要介绍方程或方程组的数值解(即近似解)的解法。

例 2　求下列方程的数值解。

(1) $\cos x=\frac{1}{2}x$;

(2) $\sin(\tan x)=1$;

(3) $10-\ln(x+\sqrt{x^2-1})+\ln(3+\sqrt{8})=0$;

(4) $\cos x=0$ 在 $x=1.5$ 附近的解;

(5) $\frac{\sin x}{x}=0$ ，$x\in(0,12]$；

(6) $x-\cos(x^3)=0$。

解：一般地超越方程的解需要用“fsolve()”命令求解。

(1) > eqns:={cos(x)=(1/2)*x};

$$eqns:=\{\cos(x)=\frac{1}{2}x\}$$

> fsolve(cos(x)=(1/2)*x);

$$1.029866529$$

> simplify(subs(x=1.029866529,eqns));

$$\{.5149332649=.5149332645\}$$

经检验，方程的数值解为 $x\approx1.029866529$。

(2) > fsolve(sin(tan(x))=1,x);

$$1.003884822$$

即方程的数值解为 $x\approx1.003884822$。

(3) > eqn:=10− (ln(x+(x^2-1)^(1/2))−ln(3+(3^2-1)^(1/2)))=0;

$$eqn:=10-\ln(x+\sqrt{x^2-1})+\ln(3+\sqrt{8})=0$$

> solve(eqn,x);

$$-\frac{1}{2}(-3e^{(-20)}-3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}e^{(-20)})e^{10}$$

> simplify(%);

$$\frac{1}{2}(3+3e^{20}+2\sqrt{2}e^{20}-2\sqrt{2})e^{(-10)}$$

> evalf(%);

$$64189.82535$$

> simplify(subs(x=64189.82535,eqn));

$$.4\ 10^{-8}=0$$

>即方程的数值解为 $x\approx64189.82535$;

方程的符号解为 $x=\frac{1}{2}(3+3e^{20}+2\sqrt{2}e^{20}-2\sqrt{2})e^{(-10)}$

(4) > fsolve(cos(x)=0,x=1.5);

$$1.570796327$$

即方程在 1.5 附近的解为 x≈1.570796327。

(5) > eqn:=sin(x)/x;

$$eqn := \frac{\sin(x)}{x}$$

> solve(eqn=0,{x});

solve()没有求出解来，利用 fsolve()命令搜寻求出解，如图 1.1 所示。

> plot(eqn,x=0.1..10,y=-0.5..1);

> fsolve(eqn=0,{x});

$$\{x=-3.141592654\}$$

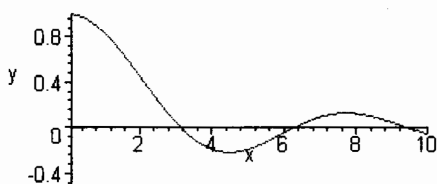


图 1.1　利用 fsolve 命令求解

> fsolve(eqn,{x=2..4});

$$\{x=3.141592654\}$$

> fsolve(eqn=0,{x=5..7});

$$\{x=6.283185307\}$$

> fsolve(eqn=0,{x=8..10});

$$\{x=9.424777961\}$$

(6) > eqn:=x-cos(x^3);

$$eqn := x-\cos(x^3)$$

> solve(eqn=0,{x});

$$\{x=\cos(\text{RootOf}(_Z-\cos(_Z)^3))\}$$

这个解也没有表达出来，用 fsolve()求解：

> fsolve(eqn=0,{x});

$$\{x=.8351229437\}$$

只有一个解，是否丢解了呢？画图检验以下，如图 1.2 所示。

> plot(eqn,x=-3..3,y=-4..4);

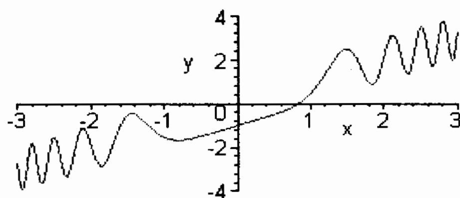


图 1.2 检验解

这个方程只有一个解。

一元不等式和不等式组：

为了求不等式的解，我们需要了解数学上常用的实数区间与 Maple 的实数范围 RealRange()的对应关系，如表 1.2 所示。

表 1.2 RealRange 表示法

实数区间符号	表示方法
(a,b)	RealRange(Open(a),Open(b))
[a,b]	RealRange(a,b)
$[a,b)$	RealRange(a,Open(b))
$(a,b]$	RealRange(Open(a),b)
$(-\infty,b)$	RealRange(− ∞ ,Open(b))
$(-\infty,b]$	RealRange(− ∞ ,b)
(a,∞)	RealRange(Open(a), ∞)
$[a,\infty)$	RealRange(a, ∞)
$(-\infty,\infty)$	RealRange(− ∞ , ∞)

数学中的不等号与 Maple 中的不等号对应关系如下，如表 1.3 所示。

表 1.3 数学中的不等号与 Maple 中的不等号对应关系

数学中的不等号	Maple 中的不等号
<	<
>	>
⩾	>=
⩽	<=
≠	<>

Maple 中求解不等式(组)的操作与求方程(组)的操作基本相同，求解命令如下：

solve(ineqn,var)： 解不等式；

solve(ineqn, {var})： 解不等式；

solve({ineqn 1 , ineqn 2 ， …} ， var)： 解不等式组。

例 3 解下列不等式或不等式组。

(1) $x^3+4x^2+2x-1>0$；

(2) $\begin{cases} 8-2^{x+1}\geq 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2\geq 0, \\ x-1>0 。\end{cases}$

解：

(1)　> solve(x^3+4*x^2+2*x-1>0,x);

$$\text{RealRange}\left(\text{Open}\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13}\right),\text{Open}(-1)\right),\text{RealRange}\left(\text{Open}\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}\right),\infty\right)$$

即解集为实数域：$(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13},-1)$ 或 $(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13},\infty)$，上式中 Open 表示开区间。

若采用如下命令，解集表达较符合传统习惯：

> solve(x^3+4*x^2+2*x-1>0,{x});

$$\{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13}<x,x<-1\},\{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}<x\}$$

(2)　> solve({8-2^(x+1)>=0,log(1/2)(x-1)+2>=0,x-1>0},{x});

$$\{1<x,x\leq\frac{-\ln(2)+\ln(8)}{\ln(2)}\}$$

> simplify(%);

$$\{1<x,x\leq 2\}$$

即解集为 $(1,2]$。会求不等式(组)的解也就会求函数的定义域了。

例 4　某人养了一对兔子(公母各一只)，一月后，这对兔子生了一对小兔，以后每月，每对成熟(即一月以上)的兔子都生育一对小兔。假如一年内没有发生死亡，一对兔子一年内繁殖成几对？

画个模型由不完全归纳法容易得到关系式：$f(n)=f(n-1)+f(n-2), f(1)=1, f(2)=1$。

写出前若干项：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，…把这个数列称为裴波那契数列。裴波那契数列源于上述的兔子问题，问题的解显然是数列的第 12 项。

把数列 $\{a_n\}$ 中的 a_n 和前面的 $a_i(0\leq i<n)$ 关联起来的方程叫递归方程，也叫差分方程。

递归方程

现在我们试用 Maple 命令求这个递归数列的通项。

求递归方程解的 Maple 命令：

rsolve(eqns,fcns)：求解由方程式 eqns 确定的递归数列的通项 f(n)：

> rsolve({f(n)=f(n-1)+f(n-2),

> f(0)=0,f(1)=1},{f(n)});

$$\left\{ f(n)=\frac{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}+1\right)\left(2\frac{1}{-1+\sqrt{5}}\right)^n}{-1+\sqrt{5}}+\frac{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}-1\right)\left(-2\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1+\sqrt{5}} \right\}$$

> fib:=unapply(eval(f(n),%),n);

$$fib := n \to \frac{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}+1\right)\left(2\frac{1}{-1+\sqrt{5}}\right)^n}{-1+\sqrt{5}}+\frac{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}-1\right)\left(-2\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1+\sqrt{5}}$$

> fib(0);

$$\frac{-\frac{1}{5}\sqrt{5}+1}{-1+\sqrt{5}}+\frac{-\frac{1}{5}\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}$$

> simplify(%);

$$0$$

> > rationalize({seq(fib(n),n=0..15)});

{0,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,}

> sq:=[0,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144];

$$sq := [0,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144]$$

> add(i,i=sq);

$$375$$

即 1 对兔子，一年内能生 375 对兔子。下面作出数列的图像：

> rationalize({seq([n,fib(n)],n=0..15)});

{ [0, 0] , [8, 21] , [4, 3] , [3, 2] , [5, 5] , [6, 8] , [7, 13] , [9, 34] , [10, 55] , [13, 233] , [15, 610] , [14, 377] , [12, 44] , [11, 89] , [2, 1] , [1, 1] }

> plot(%,style=point);

我们用作图命令 plot 作出了裴波那契数列的分布图，如图 1.3 所示。

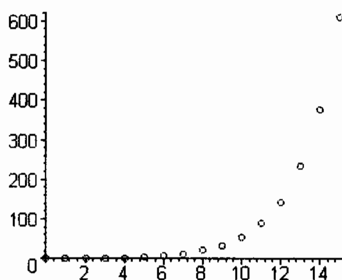


图 1.3 裴波那契数列的分布图

实验四　百鸡问题——不定方程的解

问题：

“百鸡问题”是我国古代史上杰出的成就之一，曾传到国外，当时在世界上影响很大。计算机技术的出现，使我们今天能在这一古老问题上分享科技进步的成果。我们一般将整系数不定方程称为“丢番图方程”，把求解这种方程称为“不定分析”或“丢番图分析”。如果你喜欢“数论”的话，可以在任何一本数论著述中找到它们。

实验目的：

会用综合 Maple 中的函数、序列、串行、集合、映射的命令求函数值；
会用上述命令解不定方程和进行数列的有关运算。

实验准备：

了解如下映射命令的概念和用法：
map(f,expr)：将函数 f 映射到串行、集合或数组等结构 *expr* 的元素中去。
例如：

```
> map(f,[1,2,3]);
```

$$[f(1), f(2), f(3)]$$

```
> map(sin,[a,b,c]);
```

$$[\sin(a), \sin(b), \sin(c)]$$

实验演示：

例 1　今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一。凡百钱买鸡百只。问鸡翁、鸡母、鸡雏各几何？

解：设鸡翁、鸡母、鸡雏各 x, y, z 只，得：$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100, \end{cases}$

消去 z，得：$y = \dfrac{100 - 7x}{4}$。

```
> y:=x->(100-7*x)/4;
```

$$y := x \to 25 - \frac{7}{4}x$$

> map(y,{4,8,12,16});#把 x 的可能取值映射到 $y(x)$ 这个函数中，求出 y 值：

$$\{-3,4,11,18\} \tag{1}$$

不要算 y 的值，只要观察 y 与 x 的对应关系，如下修改上段语句，求使 $y>0$ 的 x 再求 y 的值：

```
> map(y,[4,8,12]);
```

$$\{18,11,4\} \tag{2}$$

在(1)中用 x 取值的集合映射出 y 的取值集合，在(2)中用 x 取值的串行映射出 y 的取值串行，通过两种手段都能达到求函数值的目的。

```
> z:=(x,y)->100-x-y;
```

$$z := (x,y) \to 100 - x - y$$

```
> z(4,18),z(8,11),z(12,4);          #这是求二元函数的函数值，也很方便
```

$$78,81,84$$

得到三个解：$\begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ z=78 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$

所以鸡翁、鸡母、鸡雏各 4，18，78 或 8，11，81 或 12，4，84 只。

您也可以利用前面学到的 Maple 命令，另外设计一段小程序来解决这个问题。

习　题　一

1. 采用纯文本输入法和二维输入法，分别输入以下符号或算式，并执行运算， 对近似计算结果保留 8 位有效数字，看一看各有怎样的运算结果。

   π， e， $\sin\alpha$， $\ln\sqrt[3]{3\frac{1}{2}}$， $\ln\sqrt[3]{3.5}$， ∞， $(5.2a+3b)^2$， $\dfrac{x+y}{x^2-xy-2y^2}$。

2. 计算下列各值，先进行精确计算再进行近似计算，(对近似计算结果保留 Maple 系统默认的有效数字位数)看看各有怎样的运算结果。

   $\sin\frac{\pi}{6}$， $\cos\sqrt{2}$， $\arcsin\frac{1}{2}$， 100!， ln 30， $\log_2 10$， $e^{\sqrt{3}}$。

3. 18 世纪 70 年代，瑞士数学家欧拉(Euler)引进了虚数单位，系统地建立了复数理论后，发现了三角函数与 e 的虚指数幂之间的关系(欧拉公式)：

   $$e^{i\pi} = \cos\theta + i\sin\theta$$

   又利用法国数学家棣美弗(DeMoivre)发现的著名公式：

   $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

   当 r=1,n=1，$\theta=\pi$ 时得：$e^{i\pi}+1=0$，人称这是联系数学上 5 个特殊常数：e，π，i，1，0 的美妙公式。试用 Maple 计算欧拉等式，看看能否得到相同的结果。

4. 对任意实数 x，比较 floor(x)与 ceil(x)的大小。

5. (1) 求最接近 $\sqrt{2002}$ 的整数；

   (2) 小于或等于 $\sqrt{2002}$ 的最大整数；

   (3) 大于或等于 $\sqrt{2002}$ 的最小整数。

6. 求出下列各组数的最大公约数和最小公倍数：

   (1) 72，75；

   (2) 36，48，53，63，81；

(3) $\frac{7}{5}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{38}{103}$。

7. 把下列各式因式分解：

(1) x^5+x^4+x+1；

(2) $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz$；

(3) $2x^3-5x^{\frac{5}{2}}-3x^2+4x-10\sqrt{x}-6$，分别在实数集和复数集上因式分解。

8. 展开下列各式：

(1) $\sin 2x\cos 4x$；

(2) $(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)(x^2+2)$，展开后的多项式按降幂排列。

9. 解下列方程：

(1) $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=8$;

(2) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7$;

(3) $\frac{6x}{5x-1}+\frac{8}{3-15x}=\frac{1}{6}$;

(4) $\begin{cases}\frac{y}{x+1}+\frac{x}{y}+\frac{1}{y}=\frac{5}{2},\\ x^2+y=1;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}y+z+u=4,\\ x+z+u=3,\\ x+y+u=1,\\ x+y+z=10。\end{cases}$

10. 试以 subs()指令验证−5，−4，−3，−1，1，2，3，5 这 8 个数字哪一个是方程：$x^4+13x^3+59x^2+107x+60=0$ 的根。

11. 已知：$a_n=n^3$，请你把这个数列的前 8 项写成序列、串行和集合。

再求：

(1) $s_{10}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8$；

(2) $s_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k$；

(3) $p_{10}=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_8$；

(4) $p_k=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k$。

12. (1) 试利用命令 convert(evalf(Pi),rational,n)把π 转换成分数，并利用这个命令找出祖冲之的约率$\frac{22}{7}$与密率$\frac{355}{113}$分别具有几个位数的精确度。

(2) 1949 年，人类首次在名叫 ENICA 的计算机上花了 70 小时，把π 值计算到 2037 位有效数字。请在你的计算机里，用 Maple 7 来计算需要多少时间才能达到这一精确度？

(3) 在 1961 年，IBM7090 用了 8.72 个小时计算出 100200 位有效数字的π 值，在你的计算机里，用 Maple 7 来计算需要多少时间才能达到这一精确度？

13. 已知 $a_1=1,a_2=1,a_n-7a_{n-1}+10a_{n-2}=0\,(n\geq 3)$，求递归数列的通项公式。

14. 已知 $a_1=1,a_2=0,a_n=a_{n-1}-a_{n-2}=0\,(n\geq 3)$，求该递归数列的通项公式。

15. 求下列方程或方程组的数值解：

(1) $\sin^2 x-x=0$；

(2) $e^{-x}-x+x^3=0$；

(3) $\sinh x-6x^2=0$；

(4) $\begin{cases} x+\sin(xy)=0.5, \\ y-2x=0. \end{cases}$

16. 中国剩余定理源出于《孙子算经》的“物不知数”问题：“今有物，不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”请试用 Maple 求解。

第 2 章　函数的极限与连续

实验一　函数图像及性质

问题：

高等数学的研究对象是函数，图像虽然能全面的反映函数性质，但在传统数学课程中，图像更多地依赖于解析计算，而繁难的计算往往影响了对“形”的分析和使用，“数形结合”不易实现。计算机软件不但长于做大量的、繁琐的、重复的计算，而且具备较强的作图功能，利用数学计算软件“数”、“形” 的依存关系信手拈来，我们可以先作函数图像再执果索因，依图研究函数性质，甚至方程(组)、不等式的数值解也可以利用图像得到。

实验目的：

掌握在 Maple 环境下函数的定义方法；掌握函数的直角坐标表达式、参数式函数、极坐标式函数、隐函数和分段函数图像的作法；利用图像求函数的性质及方程(组)的数值解，学会求函数的极限，学会判断函数的连续性。

实验准备：

1. 函数的命令

Maple 中有一些固定的内建函数，这些函数就是如下的常用数学函数：

(1) 常用数学函数：

sin()　cos()　tan()　cot()　sec()　csc()	三角函数；
arcsin()　arcos()　arctan()	反三角函数；
arccot()　arcsec()　arccsc()	
sqrt()	算术平方根函数；
ln()	自然对数函数；
log[10]()	以 10 为底的对数函数；
log[b]()	以 b 为底的对数函数；
exp()	指数函数；
abs()	绝对值函数。

piecewise(cond_1,f_1, cond_2,f_2, …, cond_n,f_n, f_otherwise)：分段函数定义，其中条件 *cond_i*(i=1..n)以外的 x 的区域，系统默认为函数 f_otherwise。

表 2.1 列出了常用数学函数的 Maple 输入法与习惯输入法，请注意其异同。

(2) 定义函数的命令：Maple 用函数运算符“->”或命令“unapply”定义函数：

f:=x->2*x+1　　　　定义单变量函数 $f(x)=2x+1$；

f:=x->2*x*y+1　　　　定义多变量函数 $f(x,y)=2xy+1$；

f:=f 或 unassign(f)　　清除函数定义；
f:=unapply(expr,x)　　定义单变量函数$f(x)$=expr；
f:=unapply(expr,x,y,…)　　定义多变量函数$f(x,y,\cdots)$=expr。

表 2.1　符号的习惯用法与 Maple 表示法

符号的习惯用法	Maple 的表示方法
$\sin x^2$ 或 $(\sin x)^2$	sin(x)^2 或 (sin^2)(x)
$\sin x^2$ 或 $\sin(x^2)$	sin(x^2)

(3) 复合函数命令：
(f@g)(x):　　以f合成g，产生复合函数$f(g(x))$；
(f@g@h@…@t)(x):　　产生复合函数$f(g(h(\cdots t(x))))$；
(f@@n)(x):　　函数f以x为初值，迭代n次，产生迭代函数$\underbrace{f(f(f\cdots f(x)))}_{n个f}$。

2. 函数绘图的命令

plot(f(x),x=$x_1..x_2$):　　绘制函数$y=f(x)$当$x\in[x_1,x_2]$时的图像；
plot([x-expr,y-expr,parameter=range]):　　函数为直角坐标系的参数方程时的绘图命令：
polarplot(r-expr,angle=range)　　函数为极坐标方程时的绘图命令：
implicitplot(f(x,y)=c,x=x1..x2,y=y1..y2,options):　　在指定的范围内画二元隐函数$f(x,y)=c$的图像；
plot([f1(x),f2(x),f3(x),…],x=xmin..xmax):　　同时画多个函数图。

实验演示：

1. 定义函数

例 1　试用 Maple 语句定义下列各函数。

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$；

(2) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

(3) $f(x)=\arcsin(\lg x)$，并求$f(\dfrac{1}{10})$，$f(1)$，$f(10)$；

(4) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\le 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$，并求$f(-2)$，$f(0)$，$f[f(-1)]$。

解：

(1) > f:=x->sin(x)/x;

$$f := x \to \frac{\sin(x)}{x}$$

(2)　> f:=x->(exp(x)-exp(-x))/2;

$$f := x \to \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{(-x)}$$

(3)　> f:=x->arcsin(log[10](x));

$$(f := x \to \arcsin(\log_{10}(x))$$

> f(1/10),f(1),f(10);

$$-\frac{1}{2}\pi, 0, \frac{1}{2}\pi$$

为了检验上述函数关系是否定义成功，所以这一步求函数值。正确地求出了函数值，上述函数关系定义成功。下面用赋值号“:=”定义函数：

> f:=arcsin(log[10](x));

$$f := \arcsin\left(\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\right)$$

> f(1/10),f(1),f(10);

$$\arcsin\left(\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\right)\left(\frac{1}{10}\right), \arcsin\left(\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\right)(1), \arcsin\left(\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\right)(10)$$

我们看到在 Maple 中，用赋值号“：=”定义函数不能求出函数值来，只是形式地表达函数关系。再采用复合函数的方法：

> g:=x->arcsin(x);

$$g := \arcsin$$

> h:=x->log[10](x);

$$h := \log_{10}$$

> f:=x->(g@h)(x);

$$f := \arcsin@(\log_{10})$$

> f(1/10),f(1),f(10);

$$-\frac{1}{2}\pi, 0, \frac{1}{2}\pi$$

(4)　> f:=x->piecewise(x<=0,2*x+3,x>0,2^x);

$$f := x \to \text{piecewise}(x \le 0, 2x+3, 0 < x, 2^{x})$$

> f(-2),f(0),(f@f)(-1);

$$-1,3,2$$

采用“unapply”的方式定义，请读者自行试验。

作为练习，我们看看如何求分段复合函数的表达式：

```
> (f@f)(x);
```

$$\begin{cases} 2\begin{pmatrix} 2x+3 & x\le 0 \\ 2^x & 0<x \end{pmatrix}+3 & \begin{cases} 2x+3 & x\le 0 \\ 2^x & 0<x \end{cases}\le 0 \\ 2\begin{pmatrix} 2x+3 & x\le 0 \\ 2^x & 0<x \end{pmatrix} & 0<\begin{cases} 2x+3 & x\le 0 \\ 2^x & 0<x \end{cases} \end{cases}$$

```
> simplify(%);
```

$$\begin{cases} 4x+9 & x\le \frac{-3}{2} \\ 84^x & x\le 0 \\ 2^{(2^x)} & 0<x \end{cases}$$

读者可通过这个式子求$f[f(-1)]$，通过$f(f(x))$和$f(f(-1))$求复合函数和函数值。

2. 函数图像

1) $y=f(x)$或 $f(x,y)=0$ 的函数图像

例 2 作下列函数图像：

(1) $y=x^2+\dfrac{2}{x}$;

(2) $y=\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$;

(3) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$;

(4) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-y}-1=0$。

解：

(1) 定义域为 $x\neq 0$，所以选 $x=-infinity..infinity$ 为作图范围：

```
> f:=x->x^2+2/x;
```

$$f:=x\to x^2+\frac{2}{x}$$

```
> plot(f(x),x=-infinity..infinity);
```

函数关系简单时 Maple 自动去掉非定义域点，并不能作为一般的作图原则，如图 2.1 所示。依图像知 y $\in(-\infty,+\infty)$，这与我们的解析分析的结果是一致的。

(2)
```
>plot(sin(x^2)/x^2,x=-6..6,scaling=constrained);
# scaling=constrained 表示按正常比例显示，如图 2.2 所示。
```

(3) 依题意，定义域为 $x\neq\pm 2$，是偶函数，故作图时对称地取 $x\in[-5,5]$。

```
> plot(x^2/(x^2-4),x=-5..5,y=-6..6);
```

如果不要渐进线，只需加选项“discont=true”，如图 2.3a、图 2.3b 所示。

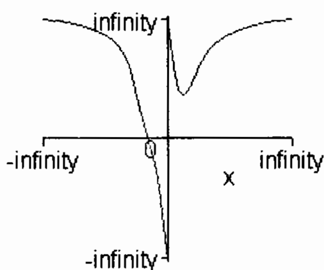


图 2.1　$y=x^2+\frac{2}{x}$ 函数图像

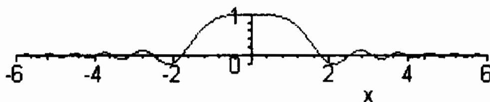


图 2.2　$y=\frac{\sin^2 x}{x^2}$ 函数图像

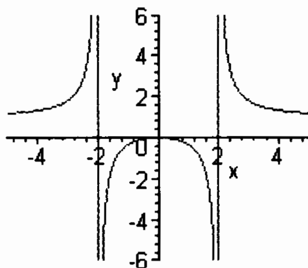


图 2.3a　$y=\frac{x^2}{x^2-4}$ 函数图像

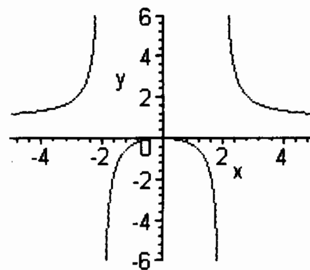


图 2.3b　去掉渐进线

(4)　依题意，由 $\frac{1}{x^2}-y\geq 0$，所以原式可化为 $\frac{1}{x^2}-y=1$，即 $y=\frac{1}{x^2}-1$，如图 2.4 所示。

易见 $y\in[-1,+\infty]$，定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以作图语句中要加选项“discont=true”，作出图形，来验证求出的值域：

plot(1/x^2-1,x=-5..5,y=-1..10,discont=true);

$x\to\infty$ 时，$y\to -1$，所以值域 $(-1, \infty)$。

例 3　求下列函数的值域：

(1)　$y=\sqrt{5+4x-x^2}$；

(2)　$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$；

(3)　$y=\frac{\sin x^2}{x^2}$。

解：先求定义域，再作图：

(1)　> plot(sqrt(5+4*x-x^2),x=-1..5,scaling=constrained);

在图形上求最值的方法：

在 Maple 工作区中光标停在图形上，单击图形的方框时，工具栏左端即出现曲线上的点坐标，光标指向图形最高点显示 2.00，3.00，所以 y 的最大值是 3，因此值域为[0，3]，如图 2.5 所示。

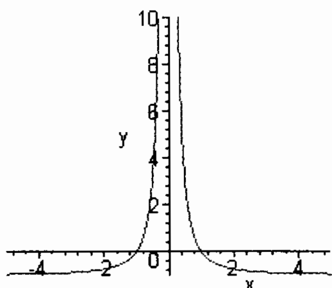


图 2.4 $y=\frac{1}{x^2}-1$ 函数图像

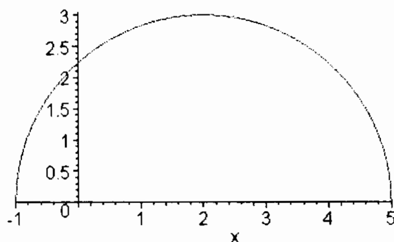


图 2.5 $y=\sqrt{5+4x-x^2}$ 函数图像

(2) 用传统的数学方法，常常作如下解答：

反函数定义域就是原函数值域，由原式得：

$e^x=\frac{1+y}{1-y}$, $x=ln\frac{1+y}{1-y}$,所以 $y^{-1}=ln\frac{1+x}{1-x}$, $\frac{1+x}{1-x}>0$ 得反函数定义域为

$-1<x<1$，故原函数值域$-1<y<1$。

现在只需用命令 plot 作出函数图像就可求出函数的值域$-1<y<1$。

```
> plot((exp(x)-1)/(exp(x)+1),x=-5..5,scaling=constrained);
```

其中选项“scaling=constrained”表示按正常比例显示图像，如图 2.6 所示。

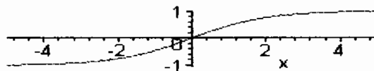


图 2.6 $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 函数图像

利用函数图像说出这两个函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、最大值、最小值情况应该是很容易办到的。

(3) 解：定义域为 $x\neq0$，是偶函数，故作图时取 $x\in[-6,6]$,

```
> plot(sin(x^2)/x^2,x=-6..6);
```

在 Maple 工作区中光标停在图形上，点亮图形的方框时，工具栏左端即出现曲线上的点坐标，光标指向图形最高点显示 0.00，1.00，指向图形最低点显示 2.09，-0.22， 因此值域为[-0.22，1]。也可以取 $x\in$(-infinity,infinity)读者自己再作个图，全面看看函数的变化趋势，如图 2.7 所示。

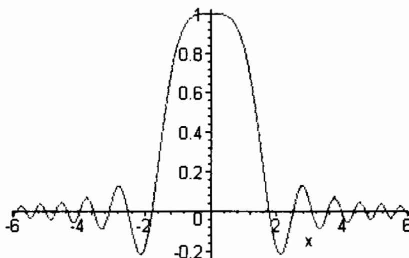


图 2.7 $y=\frac{\sin x^2}{x^2}$ 函数图像

2) 多重作图

例 4　求方程组 $\begin{cases} y=\ln(1+\dfrac{1}{x}) \\ y=\dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$ 的解。

解：这个非线性方程组没有一般解法，在数值分析课程中会有介绍。

我们通过图像求解：把 $y1=\ln(1+\dfrac{1}{x})$ 和 $y2=\dfrac{\sin x}{x}$ 的图像作在同一坐标系中，如图 2.8 所示。

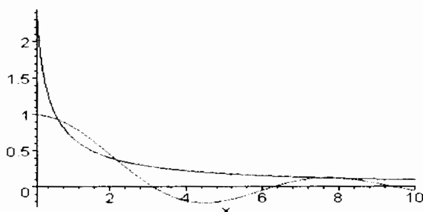


图 2.8　方程组函数图像

```
>plot([ln(1+1/x),sin(x)/x],x=0.1..10,color=[blue,brown]);
```

在计算机上可以清楚地看到：蓝色曲线为 $y=\ln(1+\dfrac{1}{x})$,棕色曲线为 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 。

```
>sol1:=fsolve({y=ln(1+1/x) ,y=sin(x)/x},{x,y});
```

$$sol1 := \{x = 7.50240072, y = .125195822\}$$

从图像上看应有 3 个解，现换一个命令“solve”求另外的解：

```
> evalf(solve({ln(1+1/x)=sin(x)/x},x));
```

$$\{x = .6506936809\}$$

```
> y:=x->ln(1+1/x);
```

$$y := x \to \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

```
> y(0.6506936809);
```

$$.9309118958$$

根据图像，我们在 $x\in(2.0,2.2)$，$y\in(0.3,0.4)$范围内搜索第三个解：

```
>sol3:=fsolve({y=ln(1+1/x),y=sin(x)/x},{x,y},{x=2.10..2.2,y=0.30..0.40});
```

$$sol3 := \{x = 2.17533519, y = .3782335727\}$$

所以方程组的近似解为：

$$sol1 := \{x = 7.502140072, y = .1251295822\}$$
$$sol2 := \{x = 0.6506936809, y = 0.9309118958\}$$
$$sol3 := \{x = 2.175313519, y = .3782335727\}$$

3) 参数方程作图

例 5　作下列参数方程的曲线：

(1) $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t。 \end{cases}$

解：

(1) > plot([t*cos(t),t*sin(t),t=-2*Pi..2*Pi]);

方程组的函数图像如图 2.9 所示。

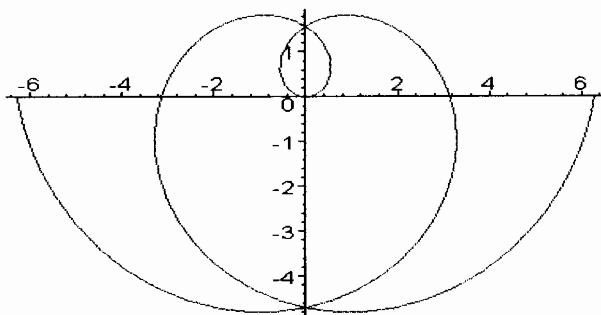


图 2.9 方程组 $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$ 函数图像

(2) > plot([2*cos(t)^3,3*sin(t)^3,t=0..2*Pi]);

方程组的函数图像如图 2.10 所示。

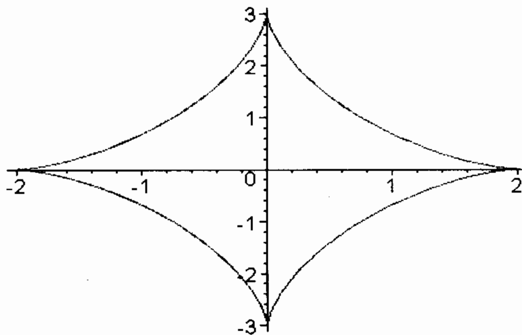


图 2.10 方程组 $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$ 函数图像

4) 极坐标作图

例 6 作极坐标方程 $r = t\theta$ 的动画图像。

解：

```
>animate(theta*t,theta=0..8*3.1415926,t=1..6,coords=polar,frames=100);
```

使用动画绘图命令“animate”作出的图像只要在 Maple 工作区中，选中图形再通过“view/context bar”，这时在工具栏中新出现了一些动画按钮，通过这些按钮可以进行图形的动画演示，如图 2.11 所示。

5) 分段函数作图

例 7　作函数 $f(x)=\begin{cases} x-2, & x<1 \\ 0, & x=1 \\ x, & x>1 \end{cases}$ 的图像。

解：

```
> with(plots):#调用工具包；
> f:=x->piecewise(x<1,x-2,x>1,x,0);#定义分段函数；
```

$$f := x \to \text{piecewise}(x<1, x-2, < x, x, 0)$$

```
> plot(f(x),x=-2..4,discont=true);
```

函数的图像如图 2.12 所示。

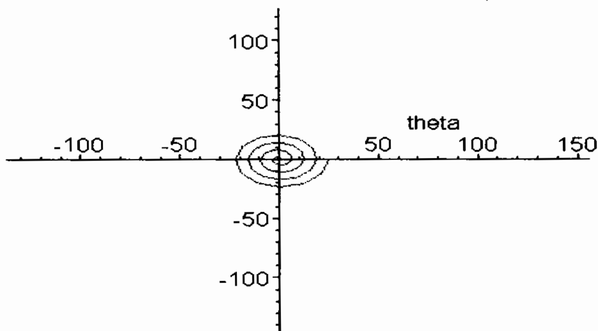


图 2.11　极坐标方程 r = tθ 的动画图像

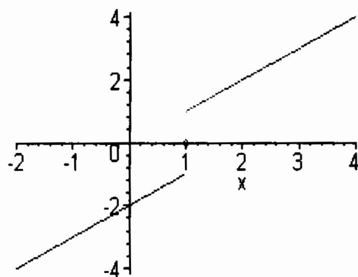


图 2.12　f(x)函数图像

6) 隐函数图像

例 8　(1)　$x^2+y^2=1$；

(2)　$r=1-\cos\theta$；

(3)　$\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ y=e^x。\end{cases}$

解：

(1)
```
> with(plots):
implicitplot(x^2 + y^2 = 1,x=-1..1,y=-1..1);
```

其函数图像如图 2.13 所示，为什么这个图形并不像圆？Maple 规定了以矩形来限制图形边界，而输出的图形往往要充满整个图片区域，这样就使“圆”变成了“椭圆”，这个问题在前面的图形当中都有所表现，不过图形性质决定，我们容易忽略那些图形的比例，这就是为什么有些绘图题目我们要加选项“scaling=constrained”的原因，本题请读者加该选项后再试一下。

(2)
```
> implicitplot(r=1-cos(theta), r=0.2,theta=0..2*Pi,coords=polar);
```

其函数图像如图 2.14 所示。

(3)
```
> implicitplot({x^2 - y^2 = 1,y = exp(x)},x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi);
```

其函数图像如图 2.15 所示。

如果读者有兴趣了解更多的作图方法，除了多练习，多体会，还可以参考相关的书籍。

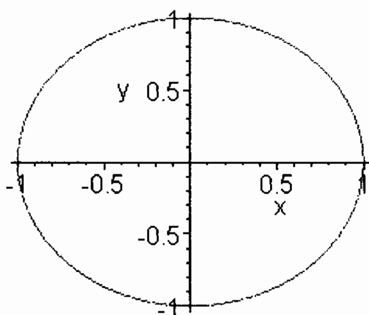


图 2.13 $x^2+y^2=1$ 函数图像

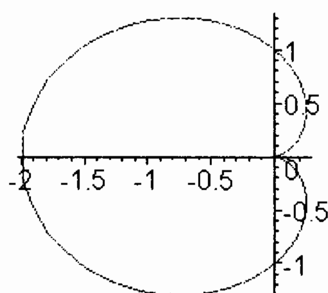


图 2.14 r=1－cosθ 函数图像

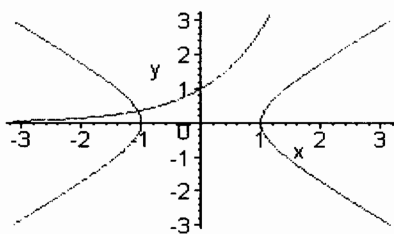


图 2.15 $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ y=e^x \end{cases}$ 函数图像

实验二 函数的极限与连续

问题：

极限概念是微积分中最基本和最重要的概念，在微积分中几乎所有基本概念都是用极限来定义的。极限概念往往令初学者费解，所以是教学的重点，也是难点。利用函数的图像帮助我们从更多的侧面认识函数极限与连续的概念，对完成初等数学向高等数学的重要过渡是有益的。

实验目的：

会利用 Maple 命令求函数的极限及函数的间断点，通过观察函数的图像全面了解函数的变化趋势和连续性质。

实验准备：

掌握极限、无穷大、无穷小的概念，无穷小的阶的概念，连续概念及零值定理。

理解以下 Maple 命令：

limit(f(x),x=a,dir) 求 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$，$a$ 取常数或 infinity 或－infinity，dir 表示 x 的变化方向，取 left、right、real or complex。

Limit(f(x),x=a,dir)	保留极限的原式，不做任何计算。
discont(f(x),x)	找出函数 $f(x)$ 所有的不连续的点。
iscont(f(x),x=a..b)	测试在 (a,b) 内，函数 $f(x)$ 是否连续。若不能判断，则返回 FALL。
iscont(f(x),x=a..b,closed)	测试在 $[a,b]$ 上，函数 $f(x)$ 是否连续。

实验演示：

例 1　求下列函数极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{2x}$；

(3) $\lim\limits_{t\to 0^+}(1-t)^{\frac{1}{t}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{\sqrt{1+x^2}-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$；

(6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\mathrm{arccot}x}$。

解：

(1) > limit((x^2+1)/(x^2−1),x=1);

undefined　　即原式极限不存在。

作出图像，考察 x→1 时 $f(x)$ 的极限状态：

> plot((x^2+1)/(x^2−1),x=-3..3);

如图 2.16 所示。

由于 y 的变化范围太大，图像看不清，限制 y 的范围，再作一次图，如图 2.17 所示。

> plot((x^2+1)/(x^2-1),x=-3..3,y=−8..8);

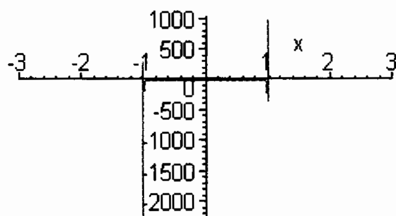


图 2.16　函数极限图

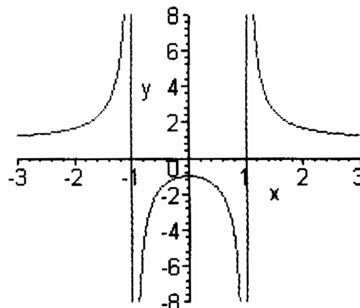


图 2.17　限制 y 的范围函数极限图

由解析式得分母的极限：$\lim\limits_{x\to\pm1}(x^2-1)=0$，分子的极限：$\lim\limits_{x\to\pm1}(x^2+1)=2$，由无穷大与无穷小的关系，所以原式极限为∞，即极限不存在。在上述图像中也说明了这样的数量变化关系。

注意： Maple 同其他数学软件一样，进行极限、导数、积分等运算时，都不能给出运算的中间过程，如果仅仅不明就里地求出了运算结果，这样的学习是没有意义的，所以在使用软件计算时，千万不能忽视数学课程的学习。我们一再强调的是：软件应用不应该也不能代替数学课程的学习。

(2) > limit((x+sin(x))/(2*x),x=infinity);

$$\frac{1}{2}$$

(6) > limit((ln(1+1/x))/arccot(x),x=infinity);

$$\text{singnum}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)\infty$$

与前面的运算类似，求极限时，出现原题输出或形式不简洁的运算结果，这时需要变换一下题目的输入形式，就会有结果了。

> limit((ln(x+1)-ln(x))/arccot(x),x=infinity);

$$1$$

(3) 所求极限为：$\mathrm{e}^{(-1)}$；

(4) 所求极限为：5 ；

(5) 所求极限为：$-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2$。

(3)、(4)和(5)的解答请读者完成。

以上各题的数学解答过程如何是读者需要思考的。

例 2 自变量 x 在怎样的变化过程中下列函数为无穷大？自变量 x 又在怎样的变化过程中下列函数为无穷小？

(1) $y=\frac{1}{x^2}$；

(2) $y=(\frac{1}{2})^{x}$；

(3) $y=2^{\frac{1}{x}}$；

(4) $y=\arctan x$。

解：

(1) > plot(1/(x^2),x=-4..4,y=0..5);

如图 2.18 所示。

当 $x\to0$ 时，$y\to+\infty$；当 $x\to\infty$时,$y\to0$；

(2) 本题请读者完成(当 $x\to+\infty$时，$y\to0$，当 $x\to-\infty$时,$y\to+\infty$)；

(3) > plot(2^(1/x),x=-8..8,y=-4..4);

当 $x\to0^+$ 时，$y\to+\infty$，当 $x\to0^-$ 时,$y\to0$；由初等数学的分析我们知道这个函数是减函数，现在作出图来，果然函数在两个 $x\neq0$ 的区间内分别递减。

(4) 本题请读者完成(当 $x\to0$ 时，$y\to0$，因为 $x\in(-\infty,\infty)$时，y 是有界量，所以 y 不是无穷大量)。

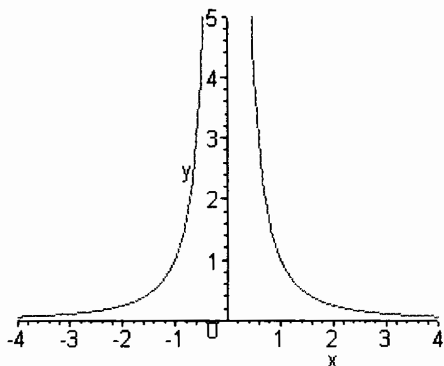


图 2.18　$y=\frac{1}{x^2}$ 函数图

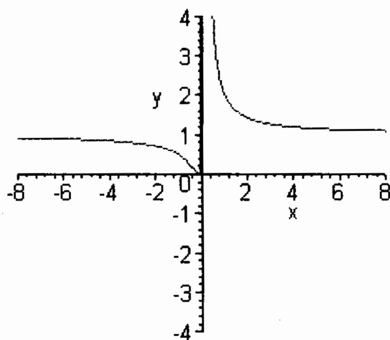


图 2.19　$y=(\frac{1}{2})^x$ 函数图

例 3　在指定的 x 的变化趋势下，比较下列各无穷小量的阶，并作出图像，从中体会各无穷小量趋向零的快慢程度。

(1) $2x-x^2$ 与 x^2-x^3　$(x\to0)$;

(2) $1-\cos x$ 与 $\frac{x^2}{2}$　$(x\to0)$;

(3) $1-x$ 与 $1-x^3$　$(x\to1)$。

解：

(1) > limit((x^2-x^3)/(2*x-x^2),x=0);

$$0$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=0$，所以 $x^2-x^3=o(2x-x^2)$　$(x\to0)$。

> plot([2*x-x^2,x^2-x^3],x=-2..2,color=[blue,brown]);

其函数比较图像如图 2.20 所示。图像显示曲线 $y=x^2-x^3$，当 $x\in(-0.4,1.2)$ 时，y 与零值相差无几$(x\to0)$，而曲线 $y=2x-x^2$ 当 $x\in(-0.2,0.2)$ 时，y 才趋近于零，也就是当 $x\to0$ 时，曲线 $y=x^2-x^3$ 比曲线 $y=2x-x^2$ 趋近于零的速度快。

(2) > limit((1-cos(x))/((x^2)/2),x=0);

$$1$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\cos x}=1$，所以 $\frac{x^2}{2}\sim1-\cos x$　$(x\to0)$。

> plot([x^2/2,1-cos(x)],x=-6..6,y=0..10,color=[green,maroon]);

图像显示曲线 $y=x^2/2$ 与 $y=1-\cos x$ 当 $x\in(-0.8,0.8)$时，都与零值相差无几，也就是当 $x\to0$ 时，两条曲线趋近于零的快慢程度几乎相同，如图 2.21 所示。

(3) > limit((1-x)/(1-x^3),x=1);

$$\frac{1}{3}$$

即 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-x^3}=\dfrac{1}{3}$，所以 $1-x$ 与 $1-x^3$ 是当 $x\to 1$ 时的同阶无穷小。

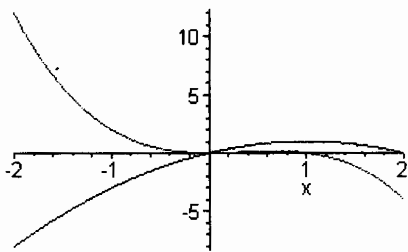


图 2.20 函数 $2x-x^2$ 与 x^2-x^3 比较图

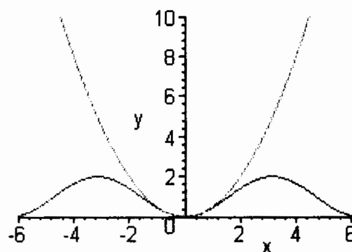


图 2.21 函数 $1-\cos x$ 与 $\dfrac{x^2}{2}$ 比较图

> plot([1-x,1-x^3],x=-4..4,y=-6..6,color=[gold,blue]);

图像显示曲线 $y=1-x$ 与曲线 $y=1-x^3$ 当 $x\to 1$ 时，y 趋近于零的快慢程度大体相同，但在点零附近趋近于 1 的快慢程度还是有区别的，如图 2.22 所示。

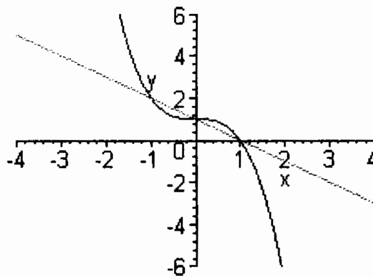


图 2.22 $1-x$ 与 $1-x^3$

例 4

(1) 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性；

(2) 求函数 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ 的连续区间和间断点，对间断点指出它的类型。

(3) 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{\cos x-\dfrac{1}{2}}$ 的连续区间和间断点，对间断点指出它的类型。

(1) 解：> limit(x*sin(1/x),x=0);

$$0$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

下面我们用测试函数是否连续的语句来考察函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

f:=x->piecewise(x<>0,x*sin(1/x),x=0,0);

$$f := x \to \text{piecewise}\left(x \neq 0, x\sin\left(\frac{1}{x}\right), x = 0, 0\right)$$

> iscont(f(x),x=-5..5);

$$true$$

> plot(f(x),x=-5..5,discont=true);
> g:=x->x*sin(1/x);

$$g := x \to x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

> iscont(g(x),x=-5..5);

$$false$$

> discont(g(x),x);

$$\{0\}$$

以上语句说明：虽然 $g(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 x=0 处间断，但由于补充进 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$，所以 $f(x)$在 x=0 处连续，从图像上我们可以更清楚地看到函数在 x=0 处的连续性，如图 2.23 所示。

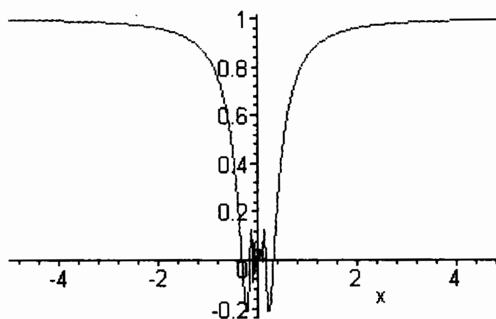


图 2.23　$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 函数图像

(2)　解：

> f:=x->(1-cos(x))/sin(x);

$$f := x \to \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

> discont(f(x),x);

$$\{\pi\ _Z1\sim\}$$

> x:=n->evalf(n*Pi);

$$x := n \to \text{evalf}(n\pi)$$

```
> n:= -2;
```

$$n := -2$$

```
> s:=n->limit(f(x),x=n*Pi);
```

$$s := n \to \lim_{x \to (n\pi)} \mathrm{f}(x)$$

```
> seq(s(n),n=-2..2);
```

$$0, undefined, 0, undefined, 0$$

```
> limit((1-cos(x))/sin(x),x=2*n*Pi);
```

$$0$$

```
> limit((1-cos(x))/sin(x),x=(2*n+1)*Pi);
```

$$undefined$$

即 $\lim\limits_{x \to 2n\pi} \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = 0$，$\lim\limits_{x \to (2n+1)\pi} \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \infty$。

综上，$f(x)$ 在$(n\pi\ ,(n+1)\pi\ )$内连续，$x=k\pi$ ，$k \in Z$ 是函数的间断点，$x=2n\pi$ 是$f(x)$的第一类可去间断点，$x=(2n+1)\ \pi$ 是$f(x)$ 的第二类无穷间断点($n \in Z$)。

下面我们求出间断点的数值解，再作出图像进一步理解函数的连续性。

```
> x:=n->evalf(n*Pi);          #定义间断点数值解函数
```

$$x := n \to \mathrm{evalf}(n\pi)$$

```
> x(-4);
```

$$-12.56637062$$

```
> seq(x(n),n=-4..4);          #求间断点序列
```

$$-12.56637062,-9.424777962,-6.28385308,-3.141592654,0.,3.141592654,$$
$$6.283185308,9.424777962,12.56637062$$

```
> plot(f(x),x=-14..14,y=-8..8);
```

在图形中可以清楚地看到$x=k\pi$ 时，y 间隔地表现为 0，∞，0，∞，…，所以在这些点上，按连续定义，$f(x)$也就不连续，如图 2.24 所示。

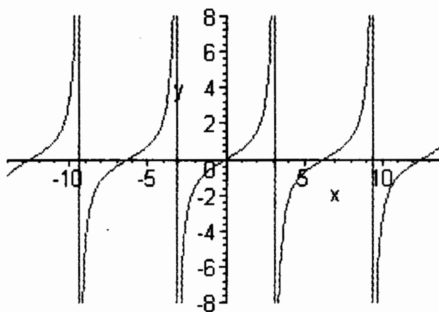


图 2.24　$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ 函数图

(3) 解：

```
> f:=x->x/(cos(x)-1/2);
```

$$f := x \to \frac{x}{\cos(x) - \frac{1}{2}}$$

```
> discont(f(x),x);
```

$$\{\frac{1}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi\ _B1\sim +2\pi_Z1\ \sim\}$$

即 $f(x)$在 $x=\frac{1}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi\, b1 + 2\pi\, z1$ 时为函数的所有连续点，其中 $b1$ 取二进制数 0 或 1，$z1$ 取所有整数，也就是 $x=\pm\frac{1}{3}\pi + 2n\pi$　$(n\in Z)$为函数所有不连续点。

下面我们继续求出间断点的数值解，再作出图像进一步理解函数的连续性，如图 2.25 所示。

```
> x:=(b,n)->evalf(1/3*Pi-2/3*Pi*b+2*Pi*n);
```

$$x := (b, n) \to \mathrm{evalf}\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi\, b + 2\pi\, n\right)$$

```
> x(0,1);
```

7.330382858

```
> seq(seq(x(b,n),b=0..1),n=-3..3);
```

−17.80235837,−19.89675347,−11.5191773.7,−13.6135687,−5.235987758,−7.330382858,
1.047197551,−1.047197551,7.330382858,5.235987758,13.61356817,11.51917307,
19.8967537,17.80235837

```
> plot(f(x),x=-18..18,y=-20..20);
```

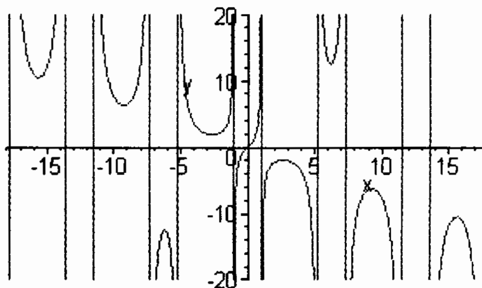


图 2.25　$f(x) = \frac{x}{\cos x - \frac{1}{2}}$ 函数图像

由图像知 $f(x)$的连续区间为$(-\pi/3+2n\pi, \pi/3+2n\pi)$或$(\pi/3+2n\pi, -\pi/3+2(n+1)\pi)$，又由于 $\lim\limits_{x\to\pm\frac{1}{3}\pi+2n\pi} \frac{x}{\cos x - \frac{1}{2}} = \infty$，所以 $x=\pm\frac{1}{3}\pi + 2n\pi$　$(n\in Z)$均为函数的第二类无穷间断点。

例 5 证明方程 $x=2\sin x+1$，至少有一个正根小于 3。

证明：设 $f(x)=2\sin x-x+1$，当 $x\in[0,3]$时，$f(x)$连续，又因为

```
> f:=x->2*sin(x)-x+1;
```

$$f := x \to 2\sin(x) - x + 1$$

```
> f(0),evalf(f(3));
```

$$1,-1.717759984$$

即端点函数值异号，所以依零值定理，$f(x)$ 在(0，3)内至少有一个实根，即 $f(x)$至少有一个小于 3 的正根。作出图像来验证这个结论。

```
> f:=x->2*sin(x)-x+1;
```

$$f := x \to 2\sin(x) - x + 1$$

```
> plot(f(x),x=-4..4,y=-3..3);
```

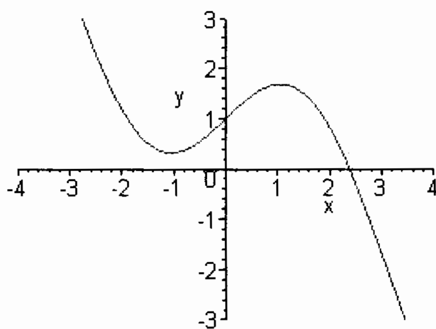


图 2.26 $f(x)=\dfrac{x}{\cos x-\frac{1}{2}}$ 函数图像

实验三 π 的计算

问题：

我们知道，圆周率π 是平面上圆的周长与直径之比，所有涉及到与圆有关的各种几何形体的计算几乎不可避免地要求助于π ，多边形的内角和也用含π 的代数式来表示，许多函数、无穷积分的结果中都与π 有着密切的关系，正如人们所说，π 在数学中扮演着一个“不可一日无此君”的重要角色。而π 的计算又有相当的难度，不但需要有效的方法和娴熟的技巧，更需要创新思维，π 的计算的每一次进步都带来了人类智慧和认识的新飞跃。π 就像一扇窗口闪烁着一个时代的数学水平和数学家智慧的光辉。通过π 的计算的回顾与展望，了解这个领域的现状，对弘扬民族科学精神，增强历史责任感是有积极意义的。

实验目的：

通过对“徽率”的计算，进一步体会用“有限逼近无穷”的极限的思想方法，巩固极限概念；

通过π 的计算，初步了解 Maple 的循环语句在差分方程中的应用；

通过对π 的计算的回顾与展望，了解π 的计算的科学意义，培养我们孜孜以求的科学奉献精神。

实验准备：

1. 熟悉极限的概念，会求数列的极限；
2. 了解以下循环语句的用法：

```
for var from a by b to c while cond do:
    something:
    end do;
```

这个语句表示变量 *var* 从 *a* 到 *c*，步长为 *b*，条件为 *cond*，以循环的方式计算 something。

实验演示：

1. π 的计算的回顾

公元前 2000 年左右，古巴比伦人得出了π =3+1/8(即 3.125)；

公元前五世纪希腊人的数学书中记载了π 取 3.1416；

公元前三世纪希腊的“数学之神”阿基米德用圆的外切与内接正多边形的周长从大、小同时逐步逼近圆的周长，得 $3\frac{11}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$；

我国则迟至公元前一世纪(东汉初年)仍普遍采用“周三径一”的古率，即π =3，直到公元 200 年间(三国时代)，数学家刘徽首创“割圆术”，我国才在π 值的计算上取得了长足的进步。刘徽算得：$3.1410<\pi<3.1427$。我国南北朝时期的数学家祖冲之继续刘徽的工作，在世界上第一次把π 推算到小数点后七位，也是最早提出π 的两个分数表达式$\pi=\frac{22}{7}$和$\pi=\frac{355}{113}$的人，前者叫约率，后者叫密率，遗憾的是他的方法失传了。欧洲直到一千多年以后，才发现密率。虽然π 值的计算我国起步较晚，但祖率能“独领风骚逾千年”而成为世界科学史上一颗璀璨的明珠，这是我们中华民族的骄傲。

如图 2.27 所示，从内接正六边形算起，然后倍增边数，设图中圆半径为 r，内接正 n 边形边长为 a_n，则正 $2n$ 边形边长 a_{2n} 与正 n 边形边长 a_n 的关系为：

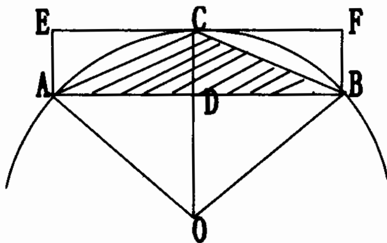


图 2.27　内接正六边形

$$a_{2n}=\sqrt{[r-\sqrt{r^2-(\frac{a_n}{2})^2}]^2+(\frac{a_n}{2})^2} \quad (1)$$

又设圆面积为 s，则圆内接正 $2n$ 边形的面积为 s_{2n}，圆内接正 n 边形的面积为 s_n，

那么，$s_n=\frac{1}{2}\cdot a_n\cdot\sqrt{r^2-(\frac{a_n}{2})^2}\cdot n$ (2)

以 EF 为一边的圆外切凸 n 边形面积为 $s_{2n}+(s_{2n}-s_n)$，所以就有了圆面积的不等式：

$$s_{2n}<s<s_{2n}+(s_{2n}-s_n) \quad (3)$$

(1)是一个递归公式，(2)式的计算依赖于 a_n，也就依赖于递归关系，手工计算工作量很大，因此用计算机研究π 值的计算是一件有意义的工作。

$n=3\cdot 2\,32^{i}$,i=1,2,3…,当 r=10、i=1 时，$a_6=r=10$。

(1)式写为 $a_{i+1}=\sqrt{[10-\sqrt{10^2-(\frac{a_i}{2})^2}]^2+(\frac{a_i}{2})^2}$ ； (4)

(2)式写为 $s_i=\frac{1}{2}\cdot a_i\cdot\sqrt{10^2-(\frac{a_i}{2})^2}\cdot 3\cdot 2^i$ ； (5)

取 r=10，刘徽算得正 192 边形的面积 $s_{192}=314\frac{64}{625}$，$s_{96}=313\frac{584}{625}$。

(3)式即

$$s_{192}<100\pi<s_{192}+(s_{192}-s_{96}) \quad (6)$$

由(6)得： $314\frac{64}{625}<100\pi<314\frac{169}{625}$;

也就是：$3.141024<\pi<3.142704$。

下面我们通过循环语句证明上式，先求 $a_6\sim a_{192}$：

```
>a(1):=10;
for i from 1 to 5 do
    a(i+1):= evalf(sqrt((10-sqrt(10^2-(a(i)/2)^2))^2+(a(i)/2)^2) );
end do;   #这是由(4)式写出的程序。
```

a(1) := 10

a(2) := 5.176380902

a(3) := 2.610523844

a(4) := 1.308062585

a(5) := .6543816566

a(6) := .3272346326

再求 s_{192} 和 s_{96}：

```
> a(1):=10;
for i from 1 to 6 do
```

```
s:= evalf((1/2)*a(i)*sqrt(10^2-(a(i)/2)^2)*(2^i)*3);
 end do;   #这是由(5)式写出的程序。
```

a(1) := 10

$s := 259.8076212$

$s := 300.0000000$

$s := 310.5828542$

$s := 313.2628616$

$s := 313.9350204$

$s := 314.1031952$

$s_{192} = 314.1031952, s_{96} = 313.9350204$，代入(4)式得：

```
> 314.1031952+314.1031952-313.9350204;
```

314.2713700

$314.1031952 < 100\pi < 314.2713700$，即 $3.141031952 < \pi < 3.142713700$。

```
> for i from 1 to 15 do:
> a(i+1):=evalf(sqrt((10-sqrt(10^2-(a(i)/2)^2))^2+(a(i)/2)^2)):
> end do;
```

a(2) := 5.176380902

a(3) := 2.610523844

a(4) := 1.308062585

a(5) := .6543816566

a(6) := .3272346326

a(7) := .1636227921

a(8) := .0818208053

a(9) := .04090612582

a(10) := .02045307361

a(11) := .01022653814

a(12) := .005113269237

a(13) := .002556634639

a(14) := .001278317322

a(15) := .000639586614

a(16) := .000319579330́7

```
> a(1):=10:
> for i from 1 to 15 do:
> s:=evalf((1/2)*a(i)*sqrt(10^2-(a(i)/2)^2)*(2^i)*3):
> end do;
```

$s := 259.8076212$

$s := 300.0000000$

$s := 310.5828542$

$s := 313.2628616$

$s := 313.9350204$

$s := 314.1031952$

$s := 314.1452474$

$s := 314.1557608$

$s := 314.1583892$

$s := 314.1590464$

$s := 314.1592106$

$s := 314.1592516$

$s := 314.1592618$

$s := 314.1592642$

$s := 314.1592652$

现计算 $S_{32768}<100\pi<S_{32768}+(S_{32768}-S_{16384})$，得：

3.141592642<π<3.141592652+(3.141592652−3.141592642)

$$3.141592642<\pi<3.141592662 \tag{7}$$

```
> Digits:=20;
```

$Digits := 20$

```
> evalf(Pi);
```

$$3.14159265358979 \tag{8}$$

把(7)式和(8)式的结果对照，得：我们用 32768 正多边形算得的结果与祖冲之用半径为 1 的圆内接正 24576 边形的周长为 3.1415926 对比，同样精确到小数点后第七位，可见祖冲之计算的结构的确优于刘徽。现在，祖冲之的肖像赫然立于法国巴黎的“发现宫”和莫斯

科的“科学大礼堂”。我们除了骄傲，更应承担起弘扬民族科学精神的重担。

2. π 的计算的意义及展望

后来不断有人致力于提高π 的精确度，1949 年美国的斯密司和伦奇把π 值计算到小数点以后 1120 位，成为当时笔算求π 值的世界冠军。

上世纪 50 年代以后π 值的计算开始借助于计算机，目前已经有人把π 计算到了一亿位甚至十亿位以上的有效数字。或许有人会问，穷追π 值的精度究竟有什么意义呢？科学家的答案是：在实用上没什么必要，一般科技问题，应用 5 位小数精确值已经足够；在“高”、“精”、“尖”科技领域使用π 值，有十几位也就完满了。但从理论和科学发现的角度来看：每一次π 的近似值研究的新突破都带来了数学和计算技术的进步，产生了人类认识的新飞跃；其次，在今天，计算无限不循环小数π 的值，是检验计算机的性能效率和比较程序设计优劣的最好方式。

占领科学高地的关键是具备创造性思维，而π 就是屡呈异彩，屡现奇迹，屡屡检验人们创造性思维的“科学精灵”。

429～500 年，祖冲之得率：$\dfrac{355}{113}$；

1593 年，法国韦达得：$\dfrac{2}{\pi}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}\cdots$；

1650 年，英国瓦里斯得：$\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots}{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdots}$；这个公式后来被他的朋友改写为：

$$\pi=1+\frac{1^2}{2}+\frac{3^2}{2}+\frac{5^2}{2}+\frac{7^2}{2}\cdots;$$

1706 年，英国麦欣得：$\dfrac{\pi}{4}=4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}$；

1743 年，英国辛普森得：数值积分法可以计算 $\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi$，…。

即使到了近代数学时代，仍然令人惊异地闪现出π 的踪影：利用随机性来作确定性的计算。

蒙特卡罗投点法：

以 $O(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 1)$为 4 个顶点作正方形，其面积为 S=1。以原点 O 为圆心的单位圆在这个正方形内的部分是圆心角为直角的扇形，面积为 $S_1=\pi/4$。在这个正方形内随机地投入 n 个点，设其中有 m 个点落在单位扇形内，

则 $\dfrac{m}{n}\approx\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{\pi}{4}$，$\pi\approx\dfrac{4m}{n}$。

1777 年，法国蒲丰在概率论诞生不太长的日子里，通过投针实验得

$$\frac{2212}{704}\approx3.142$$

投针实验的一般方法是：将一根长为 l 的针随意地投在画有间距为 $a(l<a)$的等距平行线

簇的平面上，可以证明针与其中一条直线相交的概率是 $\rho=\dfrac{2l}{\pi\cdot a}$ 则 $\pi=\dfrac{2l}{\rho\cdot a}$，特别地令 $l=\dfrac{a}{2}$，则 $\pi=\dfrac{1}{\rho}$。设投针为 n 次，其中与任一直线相交的次数为 m，则由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m}{n}=\rho$，$\rho\approx\dfrac{m}{n}$ 所以，$\pi\approx\dfrac{2nl}{ma}$。

1904 年，英国查里斯提出随机选取两个正整数，它们互质的概率是 $\dfrac{6}{\pi^2}$。

1947 年，人类开始了用计算机计算π 值的新纪元，始作俑者为美国数学家冯·诺伊曼。

不久前，人们吃惊地发现：从π 的数值式中第 155，565，860 位起都不断地出现“7…3…3…3…3…3…3…3…3…8”，这说明了什么呢？难道π 还会蕴涵着什么内在规律吗？这个“小精灵”又给人们留下了无尽的思考。

习 题 二

1. 试用 Maple 语句定义下列各函数，且用 Maple 语句证明其奇偶性，再作图验证：
   (1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$；
   (2) $y=\sin x+\cos x$；
   (3) 双曲正弦 $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；
   (4) 双曲余弦 $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；
   (5) 反双曲正弦 $\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；
   (6) 反双曲余弦 $\operatorname{arh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$。
2. 试用 Maple 语句定义下列各复合函数，并作出函数图像。
   (1) $y=e^{\sin^3 x}$；
   (2) $y=\arcsin[\lg(2x+1)]$。
3. 试用 Maple 语句定义下列各函数，并作出函数图像。
   (1) $y=\begin{cases}x^2 & x<0\\ x+1 & x\geq 0\end{cases}$，求 $f(-1.16)$、$f(0)$、$f(2)$；
   (2) 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1,\\ 0 & |x|=1,\\ -1 & |x|>1,\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作这两个函数图形；
   (3) $\begin{cases}x=2\cos^3 t\\ y=2\sin^3 t\end{cases}$；
   (4) $r=4\theta$，$\theta\in[0,2\pi]$。
4. 在一个半径为 r 的球内嵌入一个内接圆柱，试将圆柱的体积 V 表示为圆柱的高 h

的函数，试用 Maple 语句定义该函数，并求此函数的定义域。

5. 设函数 $g(x)=\begin{cases}\cos x, & x>0\\ 1+x, & x<0\end{cases}$，

(1) 观察 $g(x)$ 在 x=0 处的左右极限；

(2) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 是否存在。

6. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1-3x}{1-x^2})$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n})$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^3-1)}{x^2-1}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2^x}{x}$；

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^2)}{\sin(x^2)\tan^2 x}$。

7. 在指定的 x 的变化趋势下，比较下列各无穷小量的阶，并作出图像，从中体会各无穷小量趋向零的快慢程度：

(1) e^x-1 与 $x(x\to 0)$;

(2) $ln(1+x)$与 $x(x\to 0)$;

(3) $1-\sin x$ 与 $\cos x$ $(x\to\dfrac{\pi}{2})$。

8. 讨论下列函数的连续区间和间断点，并指出间断点的类型。

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}$；

(3) $f(x)=\cos^2\dfrac{1}{x}$；

(4) $f(x)=\dfrac{1-2^{-\frac{1}{x^2}}}{1+2^{-\frac{1}{x^2}}}$。

9. 用 Maple 语句证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间。

10. 用 Maple 语句证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$内有一个实根。

11. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 1+x^2, & x\le 0 \end{cases}$ 的连续区间和间断点，并指出间断点的类型。

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ x+a, & x\ge 0 \end{cases}$，常数 a 为何值时，函数 $f(x)$ 在$(-\infty，\infty)$内连续。

第 3 章　一元微积分

实验一　导　　数

问题：

十七世纪前后，欧洲新兴资本主义急剧发展，生产力不断提高，科学技术不断进步，人们从事的航海、天文活动需要求运动物体的速度、加速度及运动轨迹的切线，通过运动规律把握微小的“瞬时”变化规律。函数的导数就是通过导数法则求函数的“瞬时变化率”。

实验目的：

了解用 Maple 软件按导数定义求导数，讨论分段函数的导数，求曲线的切线方程的方法；理解一元显函数、隐函数、参数式函数的导数、高阶导数在 Maple 环境下的求法。

实验准备：

掌握导数及曲线的切线方程和法线方程的概念，熟悉显函数、复合函数、隐函数、参数方程确定的函数及高阶导数的求导法则。

Maple 中求导数的命令：

slope(eqn,y,x)	计算曲线 $y=f(x)$的斜率；
showtangent(f(x),x=x0)	画出曲线 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的切线；
diff(f(x),x)	求$f(x)$对 x 的一阶导数$f'(x)$；
diff(f(x),x$n)	求$f(x)$的 n 阶导数$f^{(n)}(x)$；
D(f(x),x)	求$f(x)$对 x 的一阶导数$f'(x)$；
(D@@n)(f)	求函数$f(x)$的 n 阶导数$f^{(n)}(x)$；
implicitdiff(f(x,y)=0,y,x)	求隐函数$f(x,y)$=0 的一阶导数$f'(x)$。

注意： 导数命令“diff(f(x),x) ”与“D(f(x),x) ”是有区别的，“diff(f(x),x) ”的计算结果仅仅是一阶导数 $f'(x)$ 的符号，不能算出导函数值，而“D(f(x),x) ”的计算结果是一阶导函数，可以算出某定点的导数值。例如：设$f(x)=2x^2-3x+\sin(\frac{\pi}{7})+\ln2$，求$f'(x)$和$f'(1)$。

```
> f:=x->2*x^2-3*x+sin(Pi/7)+ln(2);
```

$$f := x \to 2x^2 - 3x + \sin\left(\frac{1}{7}\pi\right) + \ln(2)$$

```
> diff(f(x),x);
```

$$4x-3$$

```
> diff(f(x),x)(1);
```

$$4x(1)-3$$

```
> D(f);
```

$$4x-3$$

```
> D(f)(1);
```

$$1$$

实验演示：

1. 导数定义及几何意义

例 1 设函数$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x<0 \\ 2x & x\ge 0 \end{cases}$，讨论函数$f(x)$在$x$=0 处的连续性与可导性。

解：

```
> f:=x->piecewise(x<0,x*sin(1/x),2*x);
```

```
> limit(x*sin(1/x),x=0,left);
```

$$0$$

```
> limit(2*x,x=0,right);
```

$$0$$

即$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$=0，因此$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，又因为$f(0)$=0，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$，也就是$f(x)$在$x$=0 处是连续的。

```
> limit((Deltax*sin(1/Deltax))/Deltax,Deltax=0,left);
```

$$-1..1$$

```
>limit((2*(0+Deltax)-0)/Deltax,Deltax=0,right);
```

$$2$$

以上运算表明函数在x=0 处的左导数不存在，这与以下人工计算的结果一致。

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$，即在$x$=0 处的左导数不存在。

```
> plot(f(x),x=-0.2..0.2,y=-1..1,discont=true);
```

通过图像可以观察到$f(x)$在x=0 的左邻域内无限震荡，不光滑。所以$f(x)$在x=0 处连续，但在x=0 处不可导，如图 3.1 所示。

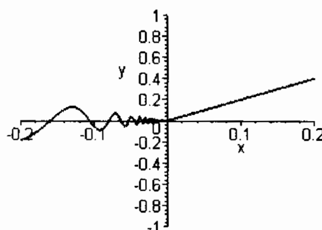


图 3.1　f(x)函数图

例 2　用导数定义求下列函数的导函数及在指定点处的切线，作图观察原函数、导函数和切线的图像之间的关系。

(1)　$y=\sin x$　　$x=\frac{\pi}{3}$；

(2)　$x^3+y+2xy=0$　　$x=1$。

解：

(1)　用导数定义求 $\sin' x$　：

```
> f:=sin;
```

$$f := \sin$$

```
> Limit((f(x+h)-f(x))/h,h=0);
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

```
> value(%);
```

$$\cos(x)$$

用导数的几何意义求导函数要更快捷：

```
> slp:=slope(y=sin(x),y,x);
```

$$slp := \cos(x)$$

```
> plot([f(x),slp],x=-Pi..Pi,y=-2..2,color=[blue,brown]);
```

注意观察图像，凡是导函数大于零的区间原函数递增，凡是导函数小于零的区间原函数递减，如图 3.2 所示。

```
>showtangent(f(x),x=Pi/3,x=-Pi..Pi,y=-2..2,color=[brown,blue]);
```

如图 3.3 所示。

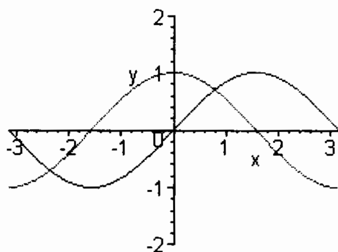


图 3.2　y=sinx 函数图像

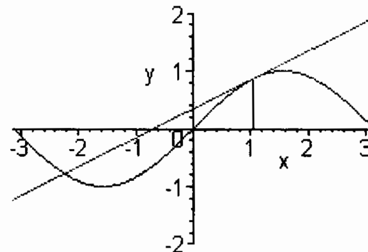


图 3.3　函数和它的切线图像

(2) > with(plots):

> f:=solve(x^3+y+2*x*y=0,y);

$$f := -\frac{x^3}{1+2x}$$

> diff(-(x^3)/(1+2*x),x);

$$-3\frac{x^2}{1+2x}+\frac{2x^3}{(1+2x)^2}$$

> f1:=simplify(%);

$$f1 := \frac{x^2(3+4x)}{(1+2x)^2}$$

> plot([f(x),f1(x)],x=-2..2,y=-2..1,color=[blue,brown],discont=true);

注意观察图像，凡是导函数大于零的区间原函数递增，凡是导函数小于零的区间原函数递减，如图 3.4 所示。

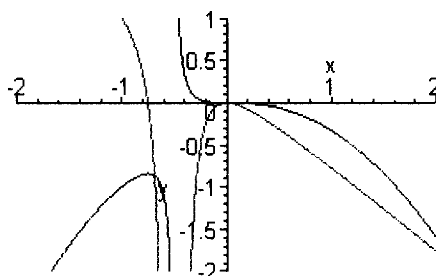


图 3.4 $x^3+y+2xy=0$ 和它的导数的函数图

> eqn:=x^3+y+2*x*y=0;

$$eqn := x^3+y+2xy=0$$

> solve({subs(x=1,eqn)},y);

$$\{y=\frac{-1}{3}\}$$

> f1(1,-1/3);

$$\frac{-7}{9}$$

> eqn1:=y+1/3=-7/9*(x-1);

$$eqnl := y+\frac{1}{3}=-\frac{7}{9}x+\frac{7}{9}$$

> g:=solve(y+1/3=-7/9*(x-1),y);

$$g := \frac{4}{9}-\frac{7}{9}x$$

>plot([f(x),g(x)],x=-2..2,y=-2..1,color=[blue,red],discont=true);

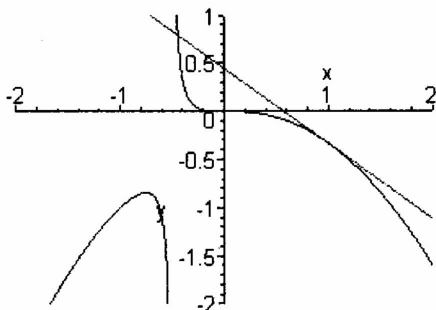


图 3.5　添加切线

所求的导函数为 $f'(x)=-\dfrac{x^2(3+4x)}{(1+2x)^2}$，切线方程为 $g(x)=\dfrac{4}{9}-\dfrac{7}{9}x$。

2. 显函数的导数

例 3　求下列各函数的导数 $y'(x)$。

(1)　$y=(\sin x-2\cos x)\ln x$;

(2)　$y=\dfrac{\arctan x}{1+\sin x}$;

(3)　$y=2^x\arccos x$;

(4)　$y=\tan(x^2+1)\sec 2x$;

(5)　$y=\sin^2(\csc(2x))$;

(6)　$y=\sin^n x\cos nx$。

解:

(1)　> f:=x->(sin(x)-2*cos(x))*ln(x);

$$f:=x\to(\sin(x)-2\cos(x))\ln(x)$$

> D(f);

$$x\to(\cos(x)+2\sin(x))\ln(x)+\frac{\sin(x)-2\cos(x)}{x}$$

即 $y'(x)=\ (\cos(x)+2\sin(x))\ln(x)+\dfrac{\sin(x)-2\cos(x)}{x}$;

(2)　$y'(x)=\ \dfrac{1}{(1+x^2)(1+\sin(x))}-\dfrac{\arctan(x)\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}$;

(3)　$y'(x)=2^x\ln(2)\arccos(x)-\dfrac{2^x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(4)　$y'(x)=\ 2(1+\tan(1+x^2)^2)x\sec(2x)+2\tan(1+x^2)\sec(2x)\tan(2x)$;

(5)　> f:=x->(sin(csc(2*x)))^2;

$$f:=x\to\sin(\csc(2x))^2$$

> D(f);

$$x\to-4\sin(\csc(2x))\cos(\mathrm{cso}(2x))\csc(2x)\cot(2x)$$

$y'(x)=\ -4\sin(\text{cso}(2x))\cos(\text{cso}(2x))\text{cso}(2x)\cot(2x)$；

(6) $y'(x)=\dfrac{\sin(x)^n n\cos(x)\cos(nx)}{\sin(x)}-\sin(x)^n\sin(nx)n$。

以上(2)、(3)、(4)和(6)解题过程留给读者完成。

例 4 求函数 $y=\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$ 在 $x=1$ 处的导数。

解：本题若用手工计算，化简导数运算过程，需要把商的对数化成对数差的形式。用软件求导时，我们也应想到尽量使求导数的过程简单，这样才便于求出简洁的符号计算结果，因此仍然需要做上述变形。

(1)
```
> f:=x->ln(sqrt(x+1)-1)-ln(sqrt(x+1)+1);
```

$$f:=x\to\ln(\sqrt{x+1}-1)-\ln(\sqrt{x+1}+1)$$

```
> D(f);
```

$$x\to\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$$

```
> D(f)(1);
```

$$\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

3. 隐函数的导数

例 5 求下列函数的导数 $y'(x)$：

(1) $2^x+2y=2^{x+y}$；

(2) 求 $y=(x-1)\sqrt[3]{\dfrac{(x-2)^2}{x-3}}$ 在 $x=4$ 处的导数 $y'(4)$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$。

解：

(1)
```
> implicitdiff(2^x+2*y=2^(x+y),y,x);
```

$$\frac{\ln(2)(2^x-2^{(x+y)})}{-2^x+2^{(x+y)}\ln(2)}$$

即 $y'(x)=\dfrac{2^x\ln 2(1-2^y)}{2^{x+y}\ln 2-2}$。

(2) 人工计算导数时，我们应遵守一个原则：尽可能地避免求积式、商式的导数。用软件求导数时，仍需这样做才能得到简捷的解。因为计算机是听人指挥的，它不具备人类思维的“积极性”和“主动性”。对复杂计算，我们特别提倡人机互动，

这让我们再次看到：具备良好的相关数学知识基础是用好软件的前提。

等式两边取对数，避免对积式、商式求导数，以化简运算，这就需要用隐函数求导的命令：

```
> implicitdiff(ln(y)=ln(x-1)+(1/3)*(2*ln(x-2)-ln(x-3)),y,x);
```

$$\frac{2}{3}\frac{y(2x^2-10x+11)}{x^3-6x^2+11x-6}$$

```
> convert(%,parfrac,x);
```

$$\frac{y}{x-1}+\frac{\frac{2}{3}y}{x-2}-\frac{1}{3}\frac{y}{x-3}$$

```
>dy:=x->(x-1)*((x-2)^2/(x-3))^(1/3)*(1/(x-1)+(2/3)/(x-2)-(1/3)*(1/(x-3)));
```

$$dy := x \to (x-1)\left(\frac{(x-2)^2}{x-3}\right)^{(1/3)}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{2}{3}}{x-2}-\frac{1}{3}\frac{1}{x-3}\right)$$

```
> dy(4);
```

$$4^{(1/3)}$$

即 $y'(4)=4^{\frac{1}{3}}$。

(3)

```
> f:=x->arcsin((e^x-e^(-x))/(e^x+e^(-x)));
```

$$f := x \to \arcsin\left(\frac{e^x-e^{(-x)}}{e^x+e^{(-x)}}\right)$$

```
> D(f);
```

$$x \to \frac{\dfrac{e^x\ln(e)+e^{(-x)}\ln(e)}{e^x+e^{(-x)}}-\dfrac{(e^x-e^{(-x)})(e^x\ln(e)-e^{(-x)}\ln(e))}{(e^x+e^{(-x)})^2}}{\sqrt{1-\dfrac{(e^x-e^{(-x)})^2}{(e^x+e^{(-x)})^2}}}$$

```
> simplify(%,thx=(e^x-e^(-x))/(e^x+e^(-x)));
```

$$x \to \frac{\dfrac{e^x\ln(e)+e^{(-x)}\ln(e)}{e^x+e^{(-x)}}-\dfrac{(e^x-e^{(-x)})(e^x\ln(e)-e^{(-x)}\ln(e))}{(e^x+e^{(-x)})^2}}{\sqrt{1-\dfrac{(e^x-e^{(-x)})^2}{(e^x+e^{(-x)})^2}}}$$

这个导数结果欠简捷，把原函数“$y=\arcsin\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$”的两边取正弦，去求隐函数的导数。

```
> implicitdiff(sin(y)=(e^x-e^(-x))/(e^x+e^(-x)),y,x);
```

$$4\frac{\ln(e)e^x e^{(-x)}}{\cos(y)((e^x)^2+2e^x e^{(-x)}+(e^{(-x)})^2)}$$

> h:=simplify(%);

$$h:=4\frac{\ln(e)}{\cos(y)(e^{(2x)}+2+e^{(-2x)})}$$

把 $\cos y=\frac{2}{e^x+e^{(-x)}}$ 代入上式，再化简：

> 4*(e^x+e^(-x))/(2*(e^x+e^(-x))^2);

$$2\frac{1}{e^x+e^{(-x)}}$$

即 $y'(x)=\frac{2}{e^x+e^{(-x)}}$。

4. 参数式函数的导数

例 6　求下列参数式函数的导数：

(1) $\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=t-\arctan t,\\ y=\ln(1+t^2),\end{cases}$　　求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$。

解：对参数式函数 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 的导数，我们仍然用 $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dx}$ 来求 $y'(x)$：

(1) > x:=t->t*cos(t);

$$x:=t\to t\cos(t)$$

> y:=t->t*sin(t);

$$y:=t\to t\sin(t)$$

> D(x);

$$t\to\cos(t)-t\sin(t)$$

> D(y);

$$t\to\sin(t)+t\cos(t)$$

> D(y)/D(x);

$$\frac{t\to\sin(t)+t\cos(t)}{t\to\cos(t)-t\sin(t)}$$

即所要求的 $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$。

(2) 要求的 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$ =2， 解题过程留给读者完成。

例 7　求下列函数的二阶导数：

(1) $f(x)=(1+x^2)\arctan x$；

(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$。

解：

(1)　> f:=x->(1+x^2)*arctan(x);

$$f := x \to (1+x^2)\arctan(x)$$

> (D@@2)(f);

$$x \to 2\arctan(x) + \frac{2x}{1+x^2}$$

即 $f''(x)=2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$。

(2)　> f:=x->ln(x+sqrt(1+x^2));

$$f := x \to \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

> (D@@2)(f);

$$x \to \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}^{\,3}}}{x+\sqrt{1+x^2}} - \frac{\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}$$

> simplify(%);

$$x \to \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}^{\,3}}}{x+\sqrt{1+x^2}} - \frac{\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}$$

“simplify”不能整体地化简代数式，需要一部分一部分地去化简，这样倒不如人工计算来得简单：

原式=

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - x - \sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})(1+x^2)} =$$

$$\frac{-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})} = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

如果先求一阶导数，再求二阶导数，是否比直接求二阶导数的结果简单呢？做一做，试试看：

> D(f);

$$x \to \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

> simplify(%);

$$x \to \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

人工化简不难得：$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，继续求$(f'(x))'$：

> f1:=x->(1+x^2)^(-1/2);

$$f1 := x \to \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

> D(f1);

$$x \to \frac{-x}{(1+x^2)^{(3/2)}}$$

即$f''(x)=-\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

例 8 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(2) $y=x\ln x$。

解：

(1) > f:=x->(1-x)/(1+x);

$$f := x \to \frac{1-x}{1+x}$$

> diff(f(x),x$n);

$$\operatorname{diff}\left(\frac{1-x}{1+x}, x\$n\right)$$

Maple 中 n 阶导数是不能直接得到的，需要采用归纳法归纳出 $f^{(n)}(x)$ 的结果，从中可以体会到它比人工计算还是方便。

> diff(f(x),x$2);

$$2\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{2(1-x)}{(1+x)^3}$$

> diff(f(x),x$3);

$$-6\frac{1}{(1+x)^3}-\frac{6(1-x)}{(1+x)^4}$$

```
> diff(f(x),x$4);
```

$$-24\frac{1}{(1+x)^4}+\frac{24(1-x)}{(1+x)^5}$$

```
> diff(f(x),x$5);
```

$$-20\frac{1}{(1+x)^5}-\frac{120(1-x)}{(1+x)^6}$$

至此，已不难归纳出 $y^{(n)}=\frac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$。

(2)
```
> f:=x->x*ln(x);
```

$$f := x \to x\ln(x)$$

```
> D(f);
```

$$x \to \ln(x)+1$$

```
> (D@@2)(f);
```

$$x \to \frac{1}{x}$$

```
> (D@@3)(f);
```

$$x \to -\frac{1}{x^2}$$

```
> (D@@4)(f);
```

$$x \to 2\frac{1}{x^3}$$

```
> (D@@5)(f);
```

$$x \to -6\frac{1}{x^4}$$

```
> (D@@6)(f);
```

$$x \to 24\frac{1}{x^5}$$

至此，也不难归纳出 $y^{(n)}=(-1)^n(n-2)!\frac{1}{x^{n-1}}$。

实验二　导数的应用

问题：

在传统数学课程中，往往通过中值定理对函数进行某些数量关系的分析，得出曲线的“形”的性质，然后再通过对“形”的分析来研究函数的性质。在数学软件的环境下，我们可以直接通过对“形”的分析来研究函数的性质。

实验目的：

在 Maple 环境下，学会讨论函数的增减性、凹凸性、极值点、拐点；学会求函数的极值、最值；学会讨论某些一元方程的根的情况。

实验准备：

可微函数单调性、凹凸性的判定法，极值点、拐点、极值、最值的概念。

例 1　求下列函数的单调递增、单调递减、上凹、下凹区间，极点、拐点及极值。

(1) $f(x)=x^3-6x^2+12x+4$；

(2) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$，$x\in(0,\pi)$；

(3) $x^3+y+2xy=0$。

解：本题与传统解题方法的不同之处在于：传统解法用充分条件的数量关系判断函数的单调、凹向、极值、拐点情况，而这里用充分条件的几何关系判断函数的单调、凹向、极值、拐点情况。我们可以看到在计算机强大的图形处理功能的条件下，这个方法是快捷、可行的。

(1)
```
> f(x)=x->x^3-6*x^2+12*x+4;
```

$$f:=x\to x^3-6x^2+12x+4$$

```
> f1:=diff(f(x),x);
```

$$f1:=3x^2-12x+12$$

```
> f2:=diff(f(x),x,x);
```

$$f2:=6x-12$$

函数的定义域虽然为(-∞ ，+∞)，但作图时只须选关于极点 x=2 有限对称的区间就可以了，如图 3.6 所示。

```
>plot([f(x),f1(x),f2(x)],x=-4..8,y=-100..100,color=[blue,green,red]);
```

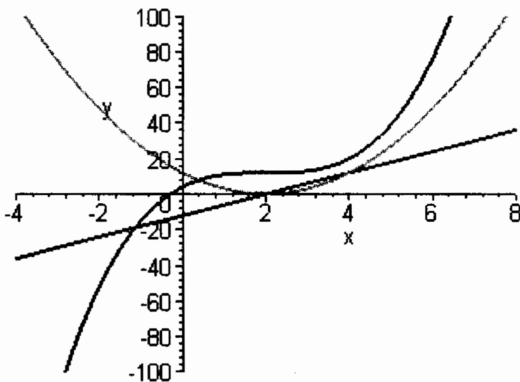


图 3.6　函数 f(x) 曲线图

```
> f(2);
```

由$f(x)$、$f'(x)$、$f''(x)$这三个函数的图像可以看到：当$x\in(-\infty,+\infty)$时，总有$f'(x)\geq 0$，所以$(-\infty,+\infty)$是$f(x)$的单调递增区间，又由于$f'(x)$不变号，所以函数没有极点和极值；当$x\in(-\infty,2)$时，$f''(x)<0$，当$x\in(2,+\infty)$时，$f''(x)>0$，所以$(-\infty,2)$是$f(x)$的下凹区间，$(2,+\infty)$是$f(x)$的上凹区间，显然，$f'(x)=0$的点为$x=2$，因此拐点为(2，12)。

(2) 先定义函数：

```
> f:=x->sin(x)+(1/3)*sin(3*x);
```

$$f:=x\to \sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)$$

```
> diff(f(x),x);
```

$$\cos(x)+\cos(3x)$$

```
> f1:=unapply(%,x);
```

$$f1:=x\to \cos(x)+\cos(3x)$$

```
> diff(f(x),x,x);
```

$$-\sin(x)-3\sin(3x)$$

```
> f2:=unapply(%,x);
```

$$f2:=x\to -\sin(x)-3\sin(3x)$$

```
> plot([f(x),f1(x),f2(x)],x=0..Pi,color=[blue,black,red]);
> {solve(f1(x)=0,x)};
```

$$\{\frac{3}{4}\pi,\ \frac{1}{4}\pi,\ \frac{1}{2}\pi\}$$

依图解题，如图 3.7 所示，函数的极点为：极小点 $x=\frac{\pi}{2}$，　极大点 $x=\frac{\pi}{4}$ 和 $x=\frac{3\pi}{4}$。

```
> {f(Pi/4),f(3*Pi/4),f(Pi/2)};
```

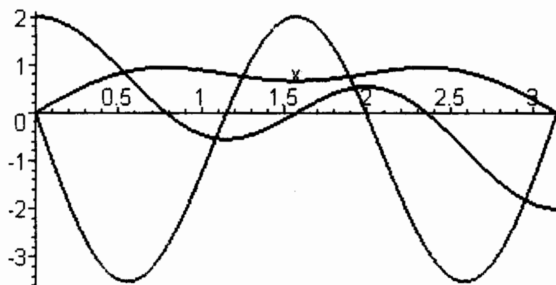


图 3.7　$f(x)=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 函数图

$$\{\frac{2}{3},\frac{2}{3}\sqrt{2}\}$$

在$x=\frac{\pi}{4}$和$x=\frac{3\pi}{4}$时，$f(x)$取得极大值$f_{max}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，在$x=\frac{\pi}{2}$时，f(x)取得极小值$f_{min}=\frac{2}{3}$。

```
> {solve(f2(x)=0,x)};
```

$$\{0,\pi,-\arctan\left(\frac{1}{6}\sqrt{30}\sqrt{6}\right),\arctan\left(\frac{1}{6}\sqrt{30}\sqrt{6}\right),-\arctan\left(\frac{1}{6}\sqrt{30}\sqrt{6}\right)+\pi$$

$$\arctan\left(\frac{1}{6}\sqrt{30}\sqrt{6}\right)-\pi$$

```
> evalf(%);
```

{0.,−1.150261992,1.991330662,−1.991330662,1.150261992,3.141592654}

```
> {f(1.150261992),f(1.991330662)};
```

{.8114408259,.8114408257}

在计算机上，依曲线的颜色可以清晰地分辨出函数、一阶导数、二阶导数的图像，所以当 $x\in(0,\pi)$时，曲线有两个拐点分别为(1.150261992，0.8114408259)和(1.991330662，0.8114408257)。当 $x\in(0,1.150261992)$和 $x\in(1.991330662,3.141592654)$时，$f''(x)<0$, $x\in(1.150261992,1.991330662)$时，$f''(x)>0$。所以曲线在(0,1.150261992) 和(1.991330662，3.141592654)时，曲线是上凹的，曲线在(1.150261992,1.991330662)内曲线是下凹的。

(3)
```
> with(plots):
> f:=solve(x^3+y+2*x*y=0,y);
```

$$f:=-\frac{x^3}{1+2x}$$

```
> diff(-(x^3)/(1+2*x),x);
```

$$-3\frac{x^2}{1+2x}+\frac{2x^3}{(1+2x)^2}$$

```
> f1:=simplify(%);
```

$$f1:=\frac{x^2(3+4x)}{(1+2x)^2}$$

```
> g:=diff(%,x);
```

$$g:=-2\frac{x(3+4x)}{(1+2x)^2}-\frac{4x^2}{(1+2x)^2}+\frac{4x^2(3+4x)}{(1+2x)^3}$$

```
> simplify(%);
```

$$-2\frac{x(3+6x+4x^2)}{(1+2x)^3}$$

```
> f2:=-2*x*(3+6*x+4*x^2)/(1+2*x)^3;
```

$$f2:=-2\frac{x(3+6x4x)^2}{(1+2x)^3}$$

```
> plot([f(x),f1(x),f2(x)],x=-2..2,y=-2..1,color=[blue,brown,red],discont=true);
```

现在根据图不难得出本题的答案，如图 3.8 所示，解答留给读者完成。

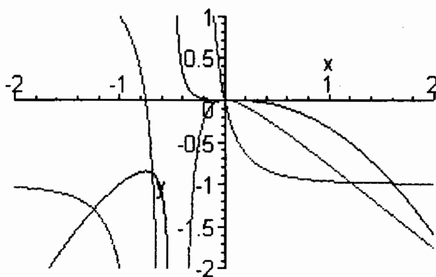


图 3.8　$x^3+y+2xy=0$ 函数图像

例 2　做出下列函数的图像，并求函数的单调递增、单调递减、上凹、下凹区间，极点、拐点及极值，如果有渐进线，再求出渐进线。

(1)　$y=(x-2)^{\frac{5}{3}}-\frac{5}{9}x^2$；

(2)　$y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$。

解：本题给出函数表达式带有自变量开方的图形的做法。

(1)　显然该函数的定义域为 R。还是用数形结合的方法，先作原函数 $f(x)$的图像：

```
> with(plots):
> f:=(x-2)^(5/3)-(5/9)*x^2;
```

$$f:=(x-2)^{(5/3)}-\frac{5}{9}x^2$$

```
> plot(f(x),x=-4..8,y=-8..2);
```

为什么(−∞，2)内的图像没有做出来呢？如图 3.9 所示，检查一下曲线上的点坐标的数据情况。

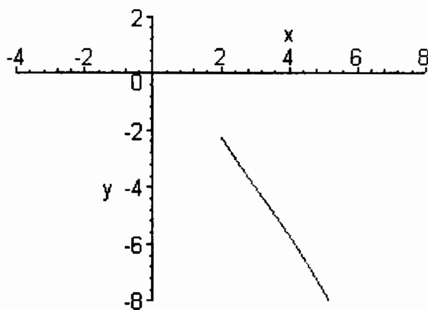


图 3.9　函数图像

```
> data1:=seq([n,(n-2)^(5/3)-(5/9)*(n^2)],n=-6..6);
```

$$data1=[-6,-8(-8)^{(2/3)}-20],\left[-5,-7(-7)^{(2/3)}-\frac{125}{9}\right],\left[-4,-6(-6)^{(2/3)}-\frac{80}{9}\right],$$
$$[-3,-5(-5)^{(2/3)}-5],\left[-2,-4(-4)^{(2/3)}-\frac{20}{9}\right],\left[-1,-3(-3)^{(2/3)}-\frac{5}{9}\right],[0,-2(-2)^{(2/3)}],$$
$$\left[1,-(-1)^{(2/3)}-\frac{5}{9}\right],\left[2,\frac{-20}{9}\right],[3,-4],\left[4,22^{(2/3)}-\frac{80}{9}\right],\left[5,33^{(2/3)}-\frac{125}{9}\right]$$
$$[6,44^{(2/3)}-20]$$

```
> evalf(%);
```

[−6.,−3.99999999 −27.728292 *I*],[−5.,−1.0813189 −22.18336194 *I*],
[−4.,1.01689286 −17.5731727 *I*],[−3.,2.310044345 −12.66136821 *I*],
[−2.,2.8746978 −8.728989088 *I*],[-1.,2.564570180 −5.404216299 *I*],
[2.,−2.222222222],[3.,-4],[4.,-5.714086785],[5.,-7.648637421],[6.,-9.9206360]

Maple 是在复数平面内求函数的 n 次方根，而复数的 n ($n\in$N) 次方根是 n 个复数，所以函数中如果含有 n 次方根的运算，当被开方数小于零时，点坐标会出现虚数。为避免这种情况，把被开方数等价变换为大于零的形式就可以了。

```
> data1:=seq([n,(n-2)*(abs(n-2))^(2/3)- (5/9)*(n^2)],n=-6..6);
```

$$data1:=[-6,-88^{(2/3)}-20],\left[-5,-77^{(2/3)}-\frac{125}{9}\right],\left[-4,-66^{(2/3)}-\frac{80}{9}\right],[-3,-55^{(2/3)}-5],$$
$$\left[-2,-44^{(2/3)}-\frac{20}{9}\right],\left[-1,-33^{(2/3)}-\frac{5}{9}\right],[0,-22^{(2/3)}],\left[1,\frac{-14}{9}\right],\left[2,\frac{-20}{9}\right],[3,-4]$$
$$\left[4,22^{(2/3)}-\frac{80}{9}\right],\left[5,33^{(2/3)}-\frac{125}{9}\right],[6,44^{(2/3)}-20]$$

```
> data1:=evalf(%);
```

data1 := [−6.,−52.00000000],[−5.,−39.50402886],[−4.,−28.70045238],
[−3.,−19.62008869],[− 2., − 12.30159062],[− 1., − 6.795807025],[0., − 3.17480204],
[1.,−1.555555556],[2., − 2.222222222],[3.. − 4],[4., − 5.74086785],
[5.,−7.64863742],[6., − 9.92063160]

这样得到的点列是实数平面上的点列，找到了与原函数等价的函数我们就可以作图了，如图 3.10 所示。

```
> with(plots):
> f:=(x-2)*(abs(x-2))^(2/3)-(5/9)*(x^2);
```

$$f:=(x-2)\,|\,x-2\,|^{(2/3)}-\frac{5}{9}x^2$$

```
> plot(f(x),x=-4..8,y=-10..1);
> g:=(x-2)^(5/3)-(5/9)*(x^2);
```

$$g:=(x-2)^{5/3}-\frac{5}{9}x^2$$

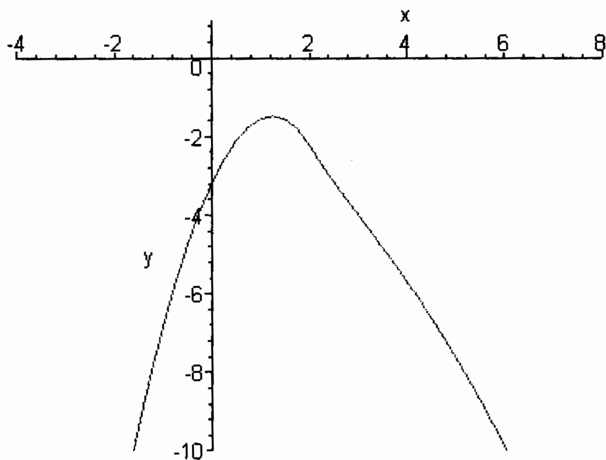


图 3.10　函数图

```
> diff(g(x),x);
```

$$\frac{5}{3}(\mathrm{x}(x)-2)^{(2/3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{x}(x)\right)-\frac{10}{9}\mathrm{x}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{x}(x)\right)$$

如下定义一阶导函数可以避免出现复数点坐标：

```
> f1:=(5/3)*(abs(x-2))^(2/3)-(10/9)*x;
```

$$f1:=\frac{5}{3}|x-2|^{(2/3)}-\frac{10}{9}x$$

```
> diff(f1(x),x);
```

$$\frac{10}{9}\frac{\frac{\partial}{\partial x}|x-2|(x)}{|x-2|(x)^{(1/3)}}-\frac{10}{9}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{x}(x)\right)$$

```
> f3:=(10/9)*((x-2)^(-1/3)-1);
```

$$f3:=\frac{10}{9}\frac{1}{(x-2)^{(1/3)}}-\frac{10}{9}$$

为保证在实平面中作出二阶导函数的图像，等价地定义二阶导函数的符号如下：

```
>f2:=piecewise(x<2,(10/9)*(-(abs(x-2))^(-1/3)-1),x>2,(10/9)*((x-2)^(-1/3)-1));
```

$$f2:=\begin{cases}-\frac{10}{9}\frac{1}{|x-2|^{(1/3)}}-\frac{10}{9} & x<2\\ \frac{10}{9}\frac{1}{(x-2)^{(1/3)}}-\frac{10}{9} & 2<x\end{cases}$$

```
>plot([f(x),f1(x),f2(x)],x=-4..8,y=-8..2,color=[blue,red,brown]);
```

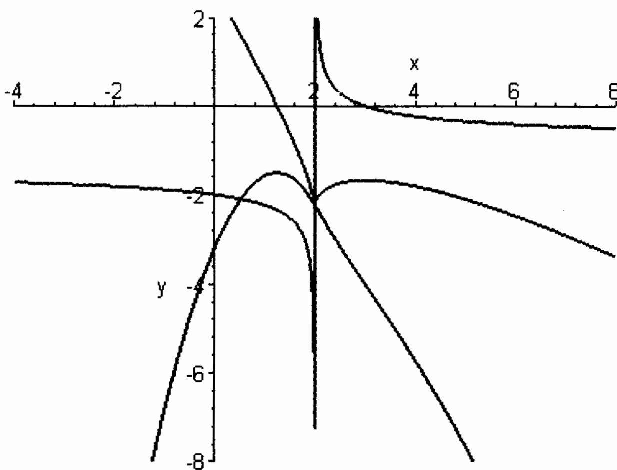


图 3.11 $y=(x-2)^{\frac{5}{3}}-\frac{5}{9}x^2$ 函数图像

```
> solve((5/3)*(abs(x-2))^(2/3)- (10/9)*x=0);
```

$$\frac{3}{8}(11+64\sqrt{3})^{(1/3)}-\frac{69}{8}\frac{1}{(11+64\sqrt{3})^{(1/3)}}+\frac{9}{8}$$

```
> evalf(%);
```

$$1.244389834$$

```
> f:=x->(x-2)*(abs(x-2))^(2/3)-(5/9)*(x^2);
```

$$f := x \to (x-2)|x-2|^{(2/3)}-\frac{5}{9}x^2$$

```
> f(1.244389834);
```

$$-1.487130216$$

以上图形及运算说明：在(−∞，1.244389834)内，$f'(x)>0$；在(1.244389834，+∞)内，$f'(x)<0$；x= 1.244389834 时，$f'(x)=0$。所以(−∞，1.244389834)是 $f(x)$的单调递增区，(1.244389834,+∞)是$f(x)$的单调递减区间，极点为 x= 1.244389834，

max$f$=f(1.244389834)= −1.487130216 。

```
>f2:=x->piecewise(x<2,(10/9)*(-(abs(x-2))^(-1/3)-1),x>2,(10/9)*((x-)^(-1/3)-1));
```

$$f2 := x \to \text{piecewise}\left(x<2,-\frac{10}{9}\frac{1}{|x-2|^{(1/3)}}-\frac{10}{9},2<x,\frac{10}{9}\frac{1}{(x-2)^{(1/3)}}-\frac{10}{9}\right)$$

```
> solve(f2(x)=0,x);
```

$$3,2$$

```
> f(3),f(2);
```

$$-4,-\frac{-20}{9}$$

以上图形及运算说明：在$(-\infty, 2)$和$(3, -\infty)$内，$f''(x)<0$；在$(2, 3)$内，$f''(x)>0$；$x=3$，$f''(x)=0$。所以$(-\infty, 2)$和$(3, +\infty)$是$f(x)$的下凹区间，$(2, 3)$是$f(x)$的上凹区间，拐点为$(3, -4)$和$(2, -\frac{20}{9})$。

(2) 当$|x|>1$时，$(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$为实数，原函数在实平面内有图像；$|x|<1$时，$(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$为虚数，原函数在实平面内没有图像，如图 3.12 所示。

```
> f:=x/(x^2-1)^(1/3);
```

$$f := \frac{x}{(x^2-1)^{(1/3)}}$$

```
> plot(f(x),x=-4..4,y=-6..6);
```

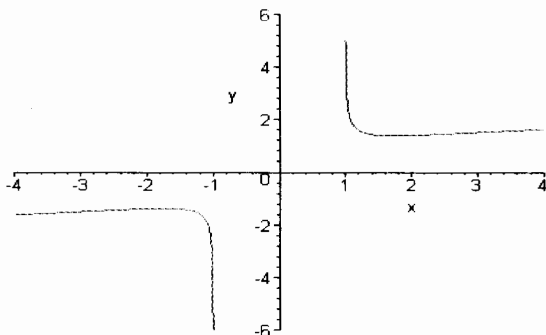


图 3.12　函数图像

把原函数作等价变换：

```
>f:=piecewise(abs(x)>1,x/(x^2-1)^(1/3),-x/(abs(x^2-1))^(1/3));
```

$$f := \begin{cases} \frac{x}{(x^2-1)^{(1/3)}} & 1<|x| \\ \frac{x}{|x^2-1|^{(1/3)}} & otherwise \end{cases}$$

```
> plot(f(x),x=-6..6,y=-4..4);
```

如图 3.13 所示。

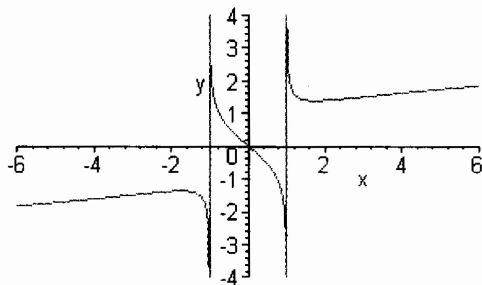


图 3.13　函数图

原函数有两条渐进线：x=±1。仍然用原函数求$f'(x)$、$f''(x)$，如图 3.11 所示，为了求导数方便，把原函数定义为“g”。

```
> g:=x/(x^2-1)^(1/3);
```

$$g := \frac{x}{(x^2-1)^{(1/3)}}$$

```
> diff(g(x),x);
```

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{x}(x)}{(\mathrm{x}(x^2)-1)^{(1/3)}}-\frac{2}{3}\frac{\mathrm{x}(x)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{x}(x)\right)}{(\mathrm{x}(x^2)-1)^{(4/3)}}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{1}{3}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{x}(x)\right)(\mathrm{x}(x)^2-3)}{(\mathrm{x}(x^2)-1)^{(4/3)}}$$

```
> f1:=(1/3)*(x^2-3)/(abs(x^2-1))^(4/3);
```

$$f1 := \frac{1}{3}\frac{x^2-3}{|x^2-1|^{(4/3)}}$$

```
> plot(f1(x),x=-6..6,y=-4..4);
```

其函数图像如图 3.14 所示。

```
> diff((1/3)*(x^2-3)/(x^2-1)^(4/3),x);
```

$$\frac{2}{3}\frac{x}{(x^2-1)^{(4/3)}}-\frac{8}{9}\frac{(x^2-3)x}{(x^2-1)^{(7/3)}}$$

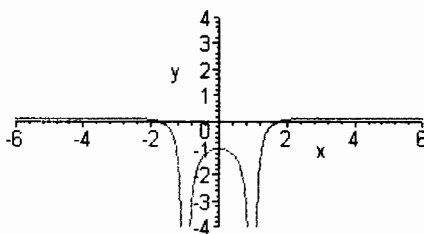


图 3.14 函数图

```
> simplify(%);
```

$$-\frac{2}{9}\frac{x(x^2-9)}{(x^2-1)^{(7/3)}}$$

```
>f2:=x->piecewise(abs(x)>1,(-2/9)*x*(x^2-9)/(x^2-1)^(7/3),(2/9)*x*(x^2-9)/(1-x^2)^(7/3));
```

$$f2 := x \to \mathrm{piecewise}\left(1<|x|,-\frac{2}{9}\frac{x(x^2-9)}{(x^2-1)^{(7/3)}},\frac{2}{9}\frac{x(x^2-9)}{(1-x^2)^{(7/3)}}\right)$$

```
> plot(f2(x),x=-6..6,y=-4..4,discont=true);
```

其函数图像如图 3.15 所示。

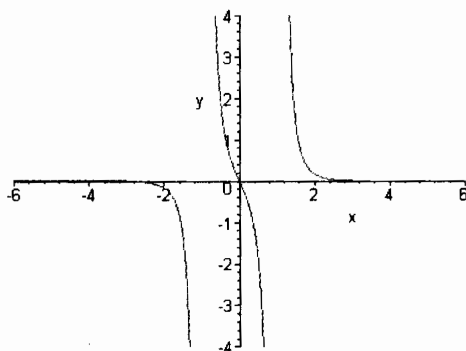


图 3.15　函数图

```
> plot([f(x),f1(x),f2(x)],x=-6..6,y=-4..4,color=[blue,red,brown],discont=true);
```

如图 3.16 所示。

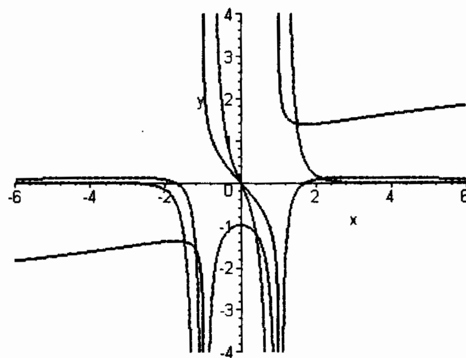


图 3.16　函数图

```
> solve((1/3)*(x^2-3)/(x^2-1)^(4/3)=0,x);
```

$$\sqrt{3},-\sqrt{3}$$

```
> f(-sqrt(3)),f(sqrt(3));
```

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3}2^{(2/3)},\frac{1}{2}\sqrt{3}2^{(2/3)}$$

```
> evalf(%);
```

$$-1.374729638,1.374729638$$

```
> solve((-2/9)*x*(x^2-9)/(x^2-1)^(7/3)=0,x);
```

$$0,3,-3$$

计算 $f'(x)=0$ 的根为 $x=\sqrt{3},-\sqrt{3}$。由以上图形，在区间$(-\infty，-\sqrt{3})$和$(\sqrt{3}，+\infty)$中，$f'(x)>0$，在区间$(-\sqrt{3},-1)$、$(-1，1)$和$(1，\sqrt{3})$中，$f'(x)<0$，所以区间$(-\infty，-\sqrt{3})$和$(\sqrt{3}，+\infty)$是 $f(x)$的单调递增区间，区间 $(-\sqrt{3},-1)$、$(-1，1)$和$(1，\sqrt{3})$是 $f(x)$的单调递减区间。极大点 $x=-\sqrt{3}$，$\max f=-1.374729638$；极小点 $x=\sqrt{3}$，$\min f=1.374729638$。

$f''(x)=0$ 的根为x=0,3,−3。在区间(−∞，−3)、(−1，0)和(1，3) $f''(x)$>0,

在区间(−3, −1)、(0，1)和(3，+∞) $f''(x)$< 0，所以区间(−∞，−3)、(−1，0)和(1，3)是$f(x)$的上凹区间，区间(−3, −1)、(0，1)和(3，+∞)是$f(x)$的下凹区间。

```
> f(-3),f(0),f(3);
```

$$-\frac{3}{8}8^{(2/3)},0,\frac{3}{8}8^{(2/3)}$$

```
> evalf(%);
```

$$-1.5000000000,0.,1.5000000000$$

函数的拐点为(−3，−1.5)、(0，0)和(3，1.5)。

Maple 还提供了两个直接求解极值的命令：

minimize(expr,vars,range)　　在指定的范围 range 内，求 expr 的极小值；

maximize(expr,vars,range)　　在指定的范围 range 内，求 expr 的极大值。

以上两个求极值的命令对一些解析式结构简单的函数是好用的，但对于一些特殊的函数，这两个指令不但有可能无法求得极值，还有可能给出错误的解。例如求 y=x−arctanx 的极值：

```
> f:=x-arctan(x);
```

$$f := x - \arctan(x)$$

```
> plot(f(x),x=-2*Pi..2*Pi);
```

其函数图像如图 3.17 所示。

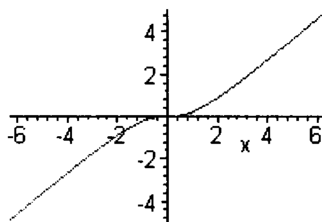


图 3.17　函数图

```
> minimize(f,x=-1..1);
```

$$-1+\frac{1}{4}\pi$$

```
> maximize(f,x=-1..1);
```

$$1-\frac{1}{4}\pi$$

函数的单调性没有改变，是不可能有极值的，显然这是错解。因此在求函数的极值时，最好的方法是先绘图，由图上找出极值的大约位置，再用 Maple 命令来求解。如果这样也得不到解，再采用例 1、例 2 介绍的一般的方法。我们来看下面的例子。

例 3　求下列函数的极值点与极值：

(1) $y=2x^3+3x^2-12x+5$；

(2) $y=x\ln x$；

(3) $f(x)=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$。

解：

(1) > f:=x->2*x^3+3*x^2-12*x+5;

$$f:=x\to 2x^3+3x^2-12x+5$$

> plot(f(x),x=-4..4);

如图 3.18 所示。

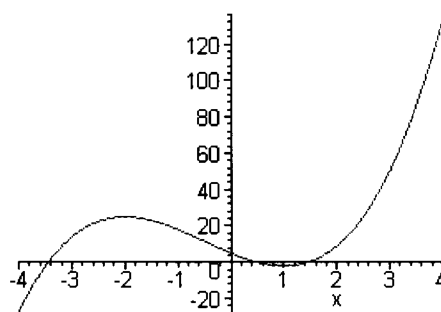


图 3.18 函数图

> maximize(f(x),x=-3..-1);

$$25$$

> minimize(f(x),x=0.5..1.5);

$$-2$$

> solve(f(x)=25,x);

$$\frac{5}{2},-2,-2$$

> solve(f(x)=-2,x);

$$\frac{-7}{2},1,1$$

根据图像知，函数的极大点为 $x=-2$, $\max f=25$；极小点为 $x=1$, $\min f=-2$。

(2) > f:=x->x*ln(x);

$$f:=x\to x\ln(x)$$

> plot(f(x),x=0..8);

如图 3.19 所示。

> minimize(f,x=0..1);

$$-\mathrm{e}^{(-1)}$$

> solve(f(x)=-exp(-1),x);

$$e^{(-1)}$$

函数的极小值点 $x=\frac{1}{e}$,$\min f=-\frac{1}{e}$。

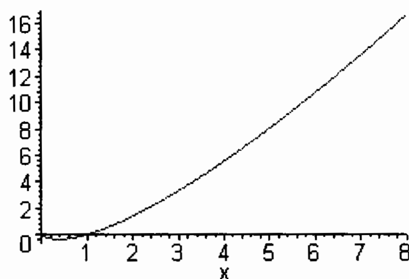


图 3.19 y=xlnx 函数

(3) > f:=x->1+36*x/(x+3)^2;

$$f := x \to 1+\frac{36x}{(x+2)^2}$$

> plot(f(x),x=-7..1);

如图 3.20 所示。

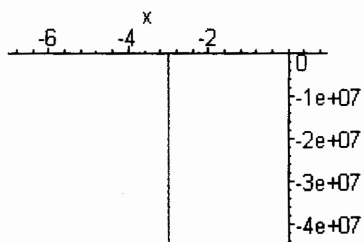


图 3.20 函数图

首先选间断点 x=−3 的对称区间 [−7，1]，若对值域没有很快地估计出来，就不限制 y 的范围，作出图来就可以估计出 y 的范围。下面根据作出的图，再给出 y 的范围。

> plot(f(x),x=-7..1,y=-10..2);

如图 3.21 所示。

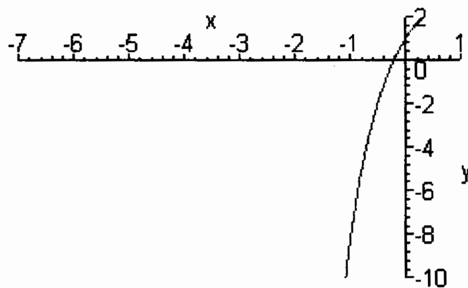


图 3.21 函数图

图像在大于 1 的范围内没有得到充分的展现，小于-3 的范围图像还没有出来，所以进一步调整 x、y 的取值范围。

```
> plot(f(x),x=-20..10,y=-10..2);
```

如图 3.22 所示。

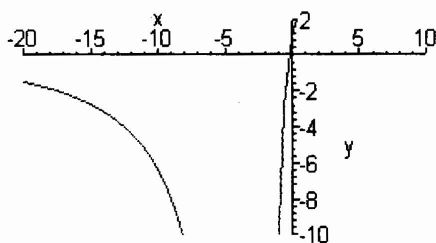


图 3.22　函数图

根据这一图像，我们已经知道怎样继续调整 x、y 的取值范围了。

```
> plot(f(x),x =-50..20,y=-20..8,discont=true);
```

如图 3.23 所示。

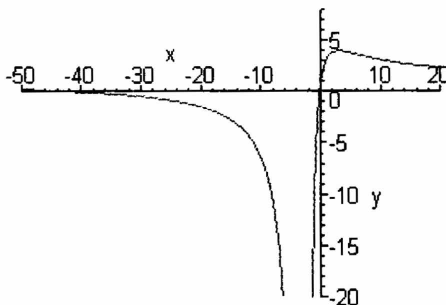


图 3.23　函数 $y=2x^3+3x^2-12x+5$ 图

得到函数比较完整的图形后，我们就可以估计函数极值的分布情况了。

```
> maximize(f(x),x=0..5);
```

$$4$$

```
> solve(f(x)=4,x);
```

$$3,3$$

其他区间没有函数单调区间的变化，所以仅有惟一的极大值点 x=3,max$f$=4。

例 4　求下列函数的最值点和最值。

(1)　$f(x)=\sqrt{5-4x}$，　$x\in[-1,1]$；

(2)　$f(x)=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$　，$x\in[0,4]$。

解：

(1)　> f:=x->sqrt(5-4*x);

$$f := x \to \sqrt{5-4x}$$

```
> plot(f(x),x=-6..5/4);
```

如图 3.24 所示。

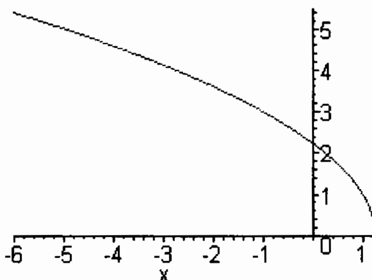


图 3.24 函数 $f(x)=\sqrt{5-4x}$

$f(x)=\sqrt{5-4x}$

\> max(f(-1),f(1));

$$3$$

\> min(f(-1),f(1));

$$1$$

显然图形中没有极值点，所以直接求端点函数值：x=1 是最小值点，$f_{最小}$=1；x=−1 是最大值点，$f_{最大}$=3，如图 3.24 所示。

(2) 在[0，4]上，函数的最大值点为 x=3, $f_{最大}$=4；最小值点为 x=0, $f_{最小}=1$。本题的解答过程请读者完成。

实验三 不定积分与定积分

问题：

不定积分和定积分分别是已知导函数求原函数和我们在实际问题中需要解决的一类特定和式极限问题。这些类型各异的积分完全可以通过程序块来表述。本节我们来探讨如何用 Maple 命令求不定积分和定积分。

实验目的：

学会用“int()”、“Int()”直接积分并写出积分表达式，学会用“chandevar()”、“intparts()”及“convert()”进行换元积分、分部积分及分式有理函数的积分。

实验准备：

1. 熟练掌握不定积分与定积分定义，熟记常用函数的积分公式。
2. 熟悉以下 Maple 中的积分命令：

int(f(x),x)　　Int(f(x),x)　　求不定积分 $\int f(x)dx$；

int(f(x),x,x=a..b),　Int(f(x),x,x=a..b)　　求定积分 $\int_a^b f(x)dx$；

lhs(expr)	等式、不等式或方程的左边；
rhs(expr)	等式、不等式或方程的右边；
chandevar(m(x)=p(u),Int(f(x),x))	将被积函数$f(x)$里的部分表达式$m(x)$代换成$p(u)$；
(Int(u*dv,x),u)	指定u，利用分部积分法积分$\int u\mathrm{d}v$，并返回$uv-\int v\mathrm{d}u$；
completesquare(f,x)	把二次三项式配成完全平方项再加上一个常数的形式。

与 diff() 和 Diff()一样，积分命令也有两个版本：int()求解的是$f(x)$的不定积分，而 Int()的结果只保留了不定积分的符号，还需继续用 value()才能求出$f(x)$的不定积分。两者的区别可以通过以下例题来体会。

实验演示：

例 1　求下列函数的不定积分。

(1) $\int\frac{(1-x)^3}{x^2}\mathrm{d}x$；

(2) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$；

(4) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x\qquad(x>3)$；

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；

(6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+1)}$；

(7) $\int x^2\sqrt{x-1}\mathrm{d}x$；

(8) $\int\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$。

解：如果用人工计算，本题一般采用换元积分法来求解不定积分。

(1)
```
> int(((1-x)^3)/x^2,x);
```

$$-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{x}-3\ln(x)$$

```
> Int(((1-x)^3)/x^2,x);
```

$$\int\frac{(1-x)^3}{x^2}\mathrm{d}x$$

```
> value(%);
```

$$-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{x}-3\ln(x)$$

即要求的结果为：$-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{x}-3\ln(x)+c$。

Maple 在积分结果中舍去了积分常数，这样做是为了处理结果时更加方便。

(2) > int(sqrt(x*sqrt(x*sqrt(x))),x);

$$\frac{8}{15}\sqrt{x\sqrt{x^{(3/2)}}}\,x$$

> simplify(%);

$$\frac{8}{15}\sqrt{x\sqrt{x^{(3/2)}}}\,x$$

先化简被积函数，再求积分：

> int(x^(7/8),x);

$$\frac{8}{15}x^{(15/8)}$$

即要求的结果为：$\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+c$。我们看到：被积函数越简洁，积分也就越容易进行，而且结果也越简洁。也可以采取更接近人工输入的方式，从中进一步体会"Int()"与"int()"命令的用法：

> Int(x^(7/8),x):%=int(x^(7/8),x);

$$\int x^{(7/8)}\mathrm{d}x=\frac{8}{15}x^{(15/8)}$$

(3) > int(1/sin(x)^2/cos(x)^2,x);

$$\frac{1}{\sin(x)\cos(x)}-\frac{2\cos(x)}{\sin(x)}$$

> simplify(%);

$$\frac{1-2\cos(x)^2}{\sin(x)\cos(x)}$$

结果对不对，可以做逆运算进行检验：

> diff(-(-1+2*cos(x)^2)/sin(x)/cos(x),x);

$$4+\frac{-1+2\cos(x)^2}{\sin(x)^2}-\frac{-1+2\cos(x)^2}{\cos(x)^2}$$

> simplify(%);

$$-\frac{1}{\cos(x)^2(-1+\cos(x)^2)}$$

通过观察，我们知道这就是被积函数。如果我们把被积函数的分子做"1"的代换：$1=\sin^2x+\cos^2x$，这就便于被积函数的化简，积分结果自然也会更简洁。

```
> int((sin(x)^2+cos(x)^2)/sin(x)^2/cos(x)^2,x);
```

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

即要求的结果为：$\tan x-\cot x+c$。

(4)
```
> int(sqrt(x^2-9)/x,x);
```

$$\sqrt{x^2-9}+3\arctan\left(3\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\right)$$

```
> diff(sqrt(x^2-9)+3*arctan(3*1/(sqrt(x^2-9))),x);
```

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}-\frac{9x}{(x^2-9)^{(3/2)}\left(1+\frac{9}{x^2-9}\right)}$$

```
> normal(%,'expanded');
```

$$\frac{x^4-18x^2+81}{x(x^2-9)^{(3/2)}}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$$

即要求的不定积分为：$c+\sqrt{x^2-9}+3\arctan\left(3\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\right)$。

(5) 本题的解答留给读者完成，要求的不定积分为：$c-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\right)$。

(6) 本题的解答留给读者完成，要求的不定积分为：

$c+\ln(x)-\frac{1}{6}\ln(x^2+1)-\frac{1}{6}\ln(x^4-x^2+1)$。

(7) 用命令 changevar()进行换元积分时，先要加载“student”链接库：

```
> with(student):
> expr:=Int(x^2*sqrt(x-1),x);
```

$$expr:=\int x^2\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$$

做变量代换，设 $x-1=u$

```
> I1:=changevar(x-1=u,expr);
```

$$I1:=\int(1+u)^2\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$$

```
> expand(%);
```

$$\int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u+2\int u^{(3/2)}\mathrm{d}u+\int u^{(5/2)}\mathrm{d}u$$

```
> value(%);
```

$$\frac{2}{3}u^{(3/2)}+\frac{4}{5}u^{(5/2)}+\frac{2}{7}u^{(7/2)}$$

再把以上结果代换成 x 的函数，即做代换 $u=x-1$:

```
> subs(u=x-1,%);
```

$$\frac{2}{3}(x-1)^{(3/2)}+\frac{4}{5}(x-1)^{(5/2)}+\frac{2}{7}(x-1)^{(7/2)}$$

用直接积分做的结果与以上结果相同。

```
> value(Int(x^2*sqrt(x-1),x));
```

$$\frac{2}{3}(x-1)^{(3/2)}+\frac{4}{5}(x-1)^{(5/2)}+\frac{2}{7}(x-1)^{(7/2)}$$

即要求的不定积分为：$c+\frac{2}{3}(x-1)^{(3/2)}+\frac{4}{5}(x-1)^{(5/2)}+\frac{2}{7}(x-1)^{(7/2)}$。

(8) 人工计算(7)、(8)两题，一般用第二类换元积分，很繁琐，与 Maple 计算过程的时效相比较，Maple 计算就很简单。

```
> int((x+2)/(sqrt(2*x+1)),x);
```

$$\frac{1}{6}(2x+1)^{(3/2)}+\frac{3}{2}\sqrt{2x+1}$$

```
> normal(%,'expanded');
```

$$\frac{1}{3}\sqrt{2x+1}x+\frac{5}{3}\sqrt{2x+1}$$

```
> diff(%,x);
```

$$\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{2x+1}}+\frac{1}{3}\sqrt{2x+1}+\frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{2x+1}}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}$$

即要求的不定积分为：$c+\frac{1}{3}\sqrt{2x+1}x+\frac{5}{3}\sqrt{2x+1}$。

例 2　求下列函数的不定积分。

(1) $\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$；

(2) $\int (x^2-x+1)\ln x\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$；

(4) $\int \arcsin x\mathrm{d}x$。

解：如果用人工求解本例中各题的不定积分，一般需采用分部积分法甚至多次使用分部积分，在 Maple 环境下，高等数学课程中的绝大部分求积分的题目都会有比较满意的解。

分部积分：

(1) 我们先按分部积分的方法来做：

先加载“student”链接库；

```
> with(student);
>Int(x*sin(x)^2,x):%=subs(sin(x)^2=(1/2)*(1-cos(2*x)),(%));
```

$$\int x\sin(x)^2\,dx=\int x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx$$

把上式的右边分部积分：

```
> lhs(%)=intparts(rhs(%),x);
```

$$\int x\sin(x)^2\,dx=x\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)\right)-\int\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)\right)dx$$

对上式的右边继续求不定积分：

```
> lhs(%)=value(rhs(%));
```

$$\int x\sin(x)^2\,dx=x\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)\right)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}\cos(2x)$$

```
> lhs(%)=simplify(rhs(%));
```

$$\int x\sin(x)^2\,dx=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin(2x)-\frac{1}{8}\cos(2x) \qquad (1)$$

```
> diff(rhs(%),x);
```

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x\cos(2x)$$

```
> subs(cos(2*x)=1-2*sin(x)^2,%);
```

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x(1-2\sin(x)^2)$$

```
> normal(%,'expanded');
```

$$x\sin(x)^2$$

我们再用不定积分的命令“int()”进行检验：

```
> int(x*sin(x)^2,x);
```

$$x\left(-\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x)+\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{4}\sin(x)^2-\frac{1}{4}x^2$$

```
> normal(%,'expanded');
```

$$-\frac{1}{2}x\cos(x)\sin(x)+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}\sin(x)^2 \qquad (2)$$

```
> diff(%,x);
```

$$\frac{1}{2}x\sin(x)^2-\frac{1}{2}x\cos(x)^2+\frac{1}{2}x$$

```
> simplify(%);
```

$$-x\cos(x)^2+x$$

```
> subs(cos(x)^2=1-sin(x)^2,%);
```

$$-x(1-\sin(x)^2)+x$$

```
> normal(%,'expanded');
```

$$x\sin(x)^2$$

经验算知道(1)或(2)加 c 后都可以作为本题求不定积分的结果。

(2)
```
> int((x^2-x+1)*ln(x),x);
```

$$\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{2}\ln(x)x^2+\frac{1}{4}x^2+x\ln(x)-x$$

所以本题积分结果为：$c+\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{2}\ln(x)x^2+\frac{1}{4}x^2+x\ln(x)-x$。

(3) 本题积分结果为：$c+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan(x)$。

(4) 本题积分结果为：$c+x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$。

(3)、(4)的解答过程留给读者完成。

分式有理函数的积分：

例 3 求下列函数的不定积分。

(1) $\int\frac{x^4-2x^3+x^2+1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$；

(2) $\int\frac{x^3}{x+3}\mathrm{d}x$。

解：在传统数学课程中本题属于分式有理函数的积分，如何用 Maple 软件来处理这部分题目？请看下面的例子。

(1) 先看直接积分的结果：

```
> int(x^4-2*x^3+x^2+1)/(x*(x-1)^2,x);
Error, (in int) wrong number (or type) of arguments
```

计算机也不会这类函数的直接积分，把被积函数化为部分分式的形式，再去积分：

```
> f:=x->(x^4-2*x^3+x^2+1)/(x*(x-1)^2);
```

$$f:=x\to\frac{x^4-2x^3+x^2+1}{x(x-1)^2}$$

```
> convert(f(x),parfrac,x);
```

$$x+\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$$

```
> int(x+1/x+1/((x-1)^2)-1/(x-1),x);
```

$$\frac{1}{2}x^2+\ln(x)-\frac{1}{x-1}-\ln(x-1)$$

我们已经观察出这个结果是正确的。

(2)　> convert(x^3/(x+3),parfrac,x);

$$x^2-3x+9-\frac{27}{x+3}$$

> int(x^2-3*x+9-27/(x+3),x);

$$\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln(x+3)$$

通过以上各题我们看到计算积分前仍需观察被积函数的类型。简单的题目可以直接用“int()”命令求出积分，否则按微积分的经典类型把被积函数稍加化简，以“引导”Maple进行计算，这样才能得到满意的符号解。由此我们再次看到不学好数学理论，进行数学软件的应用将是不可能的。

与其他数学软件相比，Maple 的符号计算功能堪称优秀，但由于大部分函数是没有积分通式的，加上 Maple 不具有人类连续思维的智慧，所以我们应注意到 Maple 求不出来的题目不一定没有解，有时它也会积出错误的结果，这也是我们坚持验算的原因。例如求积分 $\int(\sin^2 x+\sin(\cos x))\mathrm{d}x$：

> int(sin(x)^2+sin(cos(x)),x);

$$\int \sin(x)^2+\sin(\cos(x))\mathrm{d}x$$

Maple 不会自动把被积函数拆成两项去积分，需要我们输入展开的命令“expand”才能计算。注意 $\int\sin(\cos x)\mathrm{d}x$ 也是不能求出积分通式的，这个函数的定积分我们将在第 4 章中说明它的数值解的求法。

> expand(%);

$$-\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x)+\frac{1}{2}x+\int\sin(\cos(x))\mathrm{d}x$$

定积分：

例 4　求下列各定积分：

(1)　$\int_{-1}^{\sqrt{7}}2t\sqrt[3]{1+t^2}\mathrm{d}t$；

(2)　$\int_0^3\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$；

(3)　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\mathrm{d}x$；

(4)　$\int_0^1\frac{x^2}{x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x$

解：

(1)　> int((2*t)*(1+t^2)^(1/3),t=-1..sqrt(7));

$$6\,8^{(1/3)}-\frac{3}{2}2^{(1/3)}$$

```
> factor(%);
```

$$12-\frac{3}{2}2^{(1/3)}$$

或采取更接近于人工书写的格式：

```
>Int((2*t)*(1+t^2)^(1/3),t=-1..sqrt(7)):%=int((2*t)*(1+t^2)^(1/3),t=-1..sqrt(7));
```

$$\int_{-1}^{\sqrt{7}} 2t(1+t^2)^{(1/3)}\,dt = 6\,8^{(1/3)}-\frac{3}{2}2^{(1/3)}$$

```
> lhs(%)=factor(rhs(%));
```

$$\int_{-1}^{\sqrt{7}} 2t(1+t^2)^{(1/3)}\,dt = 12-\frac{3}{2}2^{(1/3)}$$

(2) 用“int()”命令直接积分：

```
>Int(x/(1+sqrt(x+1)),x=0..3):%=int(x/(1+sqrt(x+1)),x=0..3);
```

$$\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\,dx=\frac{5}{3}$$

(3) 先采用直接积分：

```
> int(exp(2*x)*cos(x),x=0..Pi/2);
```

$$\frac{1}{5}e^{\pi}-\frac{2}{5}$$

再采用分部积分：

```
>Int(exp(2*x)*cos(x),x=0..Pi/2):%=intparts(Int(exp(2*x)*cos(x),x=0..Pi/2),exp(2*x));
```

$$\int_0^{1/2\pi} e^{(2x)}\cos(x)dx = e^{\pi}-\int_0^{1/2\pi} 2e^{(2x)}\sin(x)dx$$

```
> lhs(%)=intparts(rhs(%),exp(2*x));
```

$$\int_0^{1/2\pi} e^{(2\pi)}\cos(x)dx = e^{\pi}-2+\int_0^{1/2\pi} -4e^{(2x)}\cos(x)dx$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx=\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$。

(4)
```
> convert(x^2/(x^3+x^2+x+1),parfrac,x);
```

$$\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}(x-1)}{1+x^2}$$

如果我们只关心结果，只需作如下输入即可：

```
> int(1/2*1/(x+1)+1/2*(x-1)/(1+x^2),x=0..1);
```

$$\frac{3}{4}\ln(2)+\frac{1}{8}\pi$$

如果我们也在意定积分的整体表达，建议作如下输入：

```
>Int(x^2/(x^3+x^2+x+1),x=0..1):%=Int(1/2*1/(x+1)+1/2*(x-1)/(1+x^2),x=0..1):%=int(
1/2*1/(x+1)+1/2*(x-1)/(1+x^2),x=0..1);
```

$$\left(\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}(x-1)}{1+x^2}\mathrm{d}x\right) = \frac{3}{4}\ln(2) - \frac{1}{8}\pi$$

实验四　陈酒出售的最佳时机

问题：

某酒厂有批新酿的好酒，如果现在就出售，可得总收入 R_0=50(万元)，如果窖藏起来待来日(第 n 年)按陈酒价格出售，第 n 年末可得总收入为：$R=R_0\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\sqrt{n}}$(万元)。而银行利率为 r=0.05。试分析这批好酒窖藏多少年后出售可使得总收入的现值最大。

实验目的：

用计算机求使总收入最大的出售陈酒的不同方案，学会比较不同出售方案的优劣，初步培养建立数学模型的意识。

实验准备：

一元函数极值、最值的概念。

实验演示：

1. 第一种方案：如果现在出售这批陈酒，可得本金 50 万元，因为银行利率 r=0.05，按复利计算，本利和数列为：

   $F(n)=50(1+0.05)^n$，　$n=1,2,\cdots$。　(1)

   第二种方案：如果窖藏起来，待第 n 年出售，原来的 50 万元到第 n 年时价值数列为：

   $R(n)=50\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\sqrt{n}}$，　$n=1,2,\cdots$。　(2)

2. 假设现在酒厂有一笔现金，数额为 X(万元)，将其存入银行。到第 n 年时增值为 $R(n)$(万元)。根据复利公式，$R(n)=X(1+0.05)^n$，则称 X 为 $R(n)$的现值，故 $R(n)$的现值计算公式为

$$X(n)=\frac{R(n)}{(1+0.05)^n}。$$

将 $R(n)=50\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\sqrt{n}}$ 代入上式，可得酒厂将这批好酒窖藏起来作为陈酒在第 n 年后出售的总收入 $R(n)$的现值数列为

$$X(n)=\frac{50\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\sqrt{n}}}{(1+0.05)^n}，\quad n=1,2,\cdots。\qquad (3)$$

利用这一公式，计算出 16 年内陈酒出售后总收入 $R(n)$的现值数列。

试求以下问题：

(1) 如果酒厂希望在 2 年后投资扩建酒厂，应选择哪一种方案使这批好酒所具有的价

值发挥最大作用？

(2) 如果酒厂打算将这批好酒出售所得收入用于 8 年后的另外投资，应该选择哪一年作为出售陈酒的最佳时机？

(3) 如果综合考虑银行利率，将出售陈酒后所得总收入再存入银行，使得 8 年后资金增值最大，又应该如何选择？

(4) 试作出函数 $X(n)$的图像，并利用求一元函数极大值的方法求出酒厂将这批好酒出售的最佳时机。

解：

(1) 问题分析与建立模型：

首先考虑两种简单处理方案：

第一种方案：50 万元到第 n 年本利和数列为：

$$F(n)=50(1+0.05)^n,\quad n=1,2,\cdots,\ 16;$$

第二种方案：50 万元到第 n 年时价值数列为：

$$R(n)=50e^{\frac{1}{6}\sqrt{n}},\quad n=1,2,\cdots,\ 16。$$

利用这两个公式和 Maple 分别计算出 16 年内 50 万元价值的数列，分别填入表 3.1 和表 3.2，如表 3.1、表 3.2 所示。

```
> seq(50*(1+0.05)^n,n=1..16);
52.50,55.1250,57.881250,60.77531250,63.81407810,67.00478205,70.35502115,
73.87277220,77.56641080,81.44473135,85.51696790,89.79281630,94.28245710,
98,99657995,103.9464090,109.1437294
> evalf(%,6);
52.50,55.1250,57.8812,60.7753,63.8141,67.0048,70.3550, 73.8728,77.5664,81.4447,
85,5170,89.7928,94.2825,98.9966,103,946,109.144
```

表 3.1 50 万元到第 n 年本利和数列表

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
52.50	55.1250	57.8812	60.7753	63.8141	67.0048	70.3550	73.8728
第 9 年	**第 10 年**	**第 11 年**	**第 12 年**	**第 13 年**	**第 14 年**	**第 15 年**	**第 16 年**
77.5664	81.4447	85.5170	89.7928	94.2825	98.9966	103.9460	109.1440

```
> evalf(seq(50*exp((1/6)*sqrt(n)),n=1..16),6);
59.0680,63.2900,66.7330,69.7805,72.5810,75.5810,75.2090, 77.7100,80.1120,
82.4360,84,6960,86.9030,89.0655,91.1905,93,2825,95.3470,97,3865
```

表 3.2 50 万元到第 n 年价值数列表

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
59.0680	63.2900	66.7330	69.7805	72.5810	75.2090	77.7100	80.1120
第 9 年	**第 10 年**	**第 11 年**	**第 12 年**	**第 13 年**	**第 14 年**	**第 15 年**	**第 16 年**
82.4360	84.6960	86.9030	89.0655	91.1905	93.2825	95.3470	97.3865

比较表 3.1 和表 3.2 中的数据：第一个数列在刚开始时递增速度较慢，后来递增速度较快；第二个数列在刚开始时递增速度较快，后来递增速度较慢。对比两个数列的变化，可大概得知陈酒出售的最佳时机。

作为决策者的选择：追求短期效益可简单采取第二种方案；追求长期效益应综合考虑两种方案的结合。

简单比较，应是第二种方案较好，两年后资金增值为 63.2899 万元。

(2) 同上，应是第二种方案较好，8 年后资金增值为 80.1121 万元。

(3) 第 n 年出售陈酒所得收入的现值计算公式：$X(n)=\dfrac{50\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\sqrt{n}}}{(1+0.05)^n}$。应用 Maple 计算 16 年的现值数列：

```
> evalf(seq(50*exp((1/6)*sqrt(n))/(1+0.05)^n,n=1..16),6);
56.2552,57.4058,57.6466,57.4084,56.8692,56.1219,55.2271,547.2227,53.389,
  51,9962,50.8104,49.5949,48.3601,47,1140,45.8634,44,6139
```

表 3.3　应用 Maple 计算 16 年的现值数列表

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
56.2552	57.4058	57.6466	57.4084	56.8692	56.1219	55.2271	54.2227
第 9 年	**第 10 年**	**第 11 年**	**第 12 年**	**第 13 年**	**第 14 年**	**第 15 年**	**第 16 年**
53.1389	51.9962	50.8104	49.5949	48.3601	47.1140	45.8634	44.6139

陈酒在第 3 年出售时现值最高。在 8 年后，出售陈酒可收入 80.1121 万元；但是在 3 年后，出售陈酒所得资金为 66.7329 万元，将其存入银行，再过 5 年后从银行取出。总收入按复利公式计算，在 Maple 环境下计算得：

```
> 66.7329*(1+0.05)^5;
                              85.16996985
```

这说明综合考虑两种方案：第 3 年售酒，第 8 年从银行取款可得约 85.1700 万元。显然优于单纯采用第二种方案。

(4) 用一元函数极值的方法分析如下：

先作出函数 $X(n)=\dfrac{50\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\sqrt{n}}}{(1+0.05)^n}$ 的图像，如图 3.25 所示。

```
> plot(50*exp((1/6)*sqrt(n))/((1+0.05)^n),n);
```

根据图像搜索驻点的位置，大约在(1，6)区间内：

```
> fsolve(diff(50*exp((1/6)*sqrt(n))/((1+0.05)^n),n)=0,n=1..6);
                              2.917245303
```

从图像与计算中都可以说明只有惟一的驻点 $n\approx3$(年)，所以出售陈酒的最佳时期为第 3 年。

$$n=\frac{1}{144\times0.05^2}\approx3(\text{年})$$

所以陈酒出售的最佳时机为第 3 年。

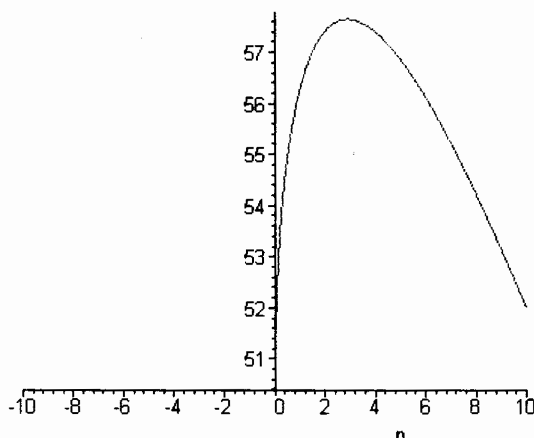


图 3.25 X(n)函数图像

结果分析：

如果单纯采用某一种方案处理陈酒，所得的收入并不是最好的(80.1121 万元)。引入现值的概念得出令人满意的结论(85.17 万元)，这是在两种方案的简单比较中得不到的。最后由离散问题转化为连续问题。用一元函数极值的方法得出了与离散方法相一致的结果：应该在第 3 年卖掉陈酒。

习 题 三

1. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$ 在 x=1 处的连续性与可导性。
2. 求下列曲线满足给定条件的切线方程和法线方程：
   (1) $y=\ln x$ 在点(e,1)；
   (2) $y=\cos x$ $(0<x<2\pi)$,切线垂直于直线 $\sqrt{2}x+y=1$。
3. 求下列函数的导数：
   (1) $y=e^{x}\ln x$；
   (2) $y=\dfrac{1-\cos t}{1+\sin t}$；
   (3) $y=\ln\sqrt{\dfrac{x}{1+x^{2}}}$；
   (4) $y=\sin^{2}(\csc 2x)$；
   (5) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}$；
   (6) $y=(1+\cos x)^{\frac{1}{x}}$。

4. 求下列函数在指定点的导数值：

(1) $y=\cot^2\sqrt{1+x^2}, x=0$；

(2) $y\sin x-\cos(x-y)=0, y'\ y'\big|_{(0,\frac{\pi}{2})}$；

(3) $\begin{cases} x=t-\arctan x, \\ y=\ln(1+t^2), \end{cases} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}$；

(4) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}, x=1$。

5. 求下列函数在指定点的二阶导数：

(1) $y=\ln(\ln x), x=e^2$；

(2) $y=\tan\dfrac{x}{2}, x=\dfrac{2\pi}{3}$。

6. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\sin^2 x$ ；

(2) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$。

7. 讨论方程 $2x^3-9x^2+12x-3=0$ 的实根个数。

8. 证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-1$ 有且仅有两个实根。

9. 求下列函数的单调区间、极点与极值：

(1) $y=2-(x-1)^{\frac{2}{3}}$；

(2) $y=x^2e^{-x}$；

(3) $y=2x^3+3x^2-12x+5$;

(4) $y=x^{\frac{1}{x}}$。

10. 把下列给定函数 $f(x)$、$f'(x)$、$f''(x)$ 的图像作在同一坐标系中，并求 $f(x)$ 的单调区间、凹凸区间、极值点、极值和拐点。

(1) $f(x)=x^2\ln x$;

(2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+12}$；

(3) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;

(4) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$。

11. 作下列函数的图像：

(1) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$；

(2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$;

(3) $y^2=x(x-1)^2$;

(4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$。

12. 利用函数的单调性证明下列不等式，并作出图像验证：

(1) 当 $x>0$ 时，$1+\dfrac{x}{2}>\sqrt{1+x}$;

(2) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$。

13. 求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}$;

(4) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

(5) $\displaystyle\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$。

14. 求下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{y^2}\sin\frac{1}{y}\mathrm{d}y$;

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^3 x-\cos^5 x}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^x(1-\sin^3 x)\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^3\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}2x\arctan x\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^4-2x^3+x^2+1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$。

第 4 章　数值积分与微分

实验一　数 值 积 分

问题：

尽管我们已经学习了许多积分方法，但还有很多函数的原函数由于不能用初等函数表达而“积不出来”，例如 $\int \sin(\cos(x))\mathrm{d}x$ 。特别是对用离散的数据或图形表达的函数进行积分运算时，就要求助于数值积分的计算方法。

实验目的：

学会用 Maple 语句按左接矩形法，右接矩形法，梯形法与辛普森法求某些不可积函数定积分的近似值。

实验准备：

一般要计算定积分 $s=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ，也就是计算由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0, x=a, x=b$ 所围成的曲边梯形的面积，需要用一组平行于 y 轴的直线 $x=x_i\ (0\le i\le n, a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b)$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，总面积 s 分成这些小曲边梯形面积之和。如果 n 取得很大，使每个小曲边梯形的宽度都很小，将每个小曲边梯形近似地当作矩形来求面积，就得到矩形法近似积分公式；将每个小曲边梯形近似地当作梯形来求面积，就得到梯形法近似积分公式；更准确些，将每个小曲边梯形的上边界近似地看作抛物线段，就得到辛普森公式，具体如下文。

1. 矩形法

(1)　左接矩形法

取分点 $a=x_0, x_1,\cdots, x_n=b$，将区间 $[a,b]$ n 等分，即 $x_i=a+i(b-a)/n, 0\leqslant i\leqslant n$，则每一个小矩形的宽度都是 $\Delta x=(b-a)/n$，如果取小区间左端点的函数值作为小矩形的长，则小矩形的长度是 $y_i=f(x_i)$，第 i 个小梯形面积 s_i 近似地等于第 i 个小矩形面积 $\Delta x\, y_i$，很多小矩形的面积的总和近似等于曲边梯形的面积 s，所以：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=s\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})$$

(2)　右接矩形法

如果取小区间右端点的函数值作为小矩形的长，类似地可以得到积分的近似值。

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=s\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2\cdots+y_n)$$

2. 梯形法

同上划分，将第 i 个小曲边梯形面积 s_i 近似地取为 $\frac{1}{2}(y_{i-1}+y_i)\cdot\Delta x$，把所有这些小梯形面积加起来就得到梯形公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=s\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2\cdots+y_{n-1}+\frac{y_0+y_n}{2})$$

3. 抛物线法(辛普森法)

用分点 $x_i=a+i(b-a)/n(1\leqslant i\leqslant n-1)$，将区间$[a,b]$分成 n(n 为偶数)等份，设各分点处的函数值分别为 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n$。曲线 $y=f(x)$也相应地被分成 n 个小弧段，得 n 个小曲边梯形，设曲线 $y=f(x)$ 上的分点为 $M_0,M_1,M_2,\cdots,M_n$，再取每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的中点 $x_{i-\frac{1}{2}}=a+\left(i-\frac{1}{2}\right)(b-a)/n$，将第 i 个小曲边梯形的上边界 $y=f(x)$ $(x_{i-1}\le x\le x_i)$ 近似地看作经过三点$(x,f(x))(x=x_{i-1},x_{i-\frac{1}{2}},x_i)$的抛物线段。我们知道三点可以确定一条抛物线 $y=px^2+qx+r$。

我们先计算在$[-h,h]$上，以过三点 $N_0(-h,y_0),N_1(0,y_1),N_2(h,y_2)$ 的抛物线 $y=px^2+qx+r$ 为曲边的曲边梯形的面积。三点坐标应满足下列方程组：

$$\begin{cases}y_0=ph^2-qh+r\\ y_1=r\\ y_2=ph^2+qh+r\end{cases}$$

由此得　$2ph^2=y_0-2y_1+y_2$，于是所求面积为

$$A=\int_{-h}^{h}(px^2+qx+r)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}px^3+\frac{q}{2}x^2+rx\right]_{-h}^{h}=\frac{2}{3}ph^3+2rh$$

$$=\frac{1}{3}h(2ph^2+6r)=\frac{1}{3}h(y_0-2y_1+y_2+6y_1)=\frac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2)$$

让曲边梯形沿 x 轴平移，其高度、宽度均不变，这表明曲边梯形面积与分点横坐标无关，而仅取决于三个高度及宽度。因此，过 M_0,M_1,M_2 三点；过 M_2,M_3,M_4 三点；……；过 M_{n-2},M_{n-1},M_n 三点的抛物线所对应的曲边梯形的面积依次为：

$$A_1=\frac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2),$$

$$A_2=\frac{1}{3}h(y_2+4y_3+y_4),$$

…………

$$A_{\frac{n}{2}}=\frac{1}{3}h(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)。$$

其中 $h=\frac{b-a}{n}$，把上面 $\frac{n}{2}$ 个曲边梯形的面积加起来，就得到定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似抛物线公式，也叫辛普森公式。

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{3n}\left[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})\right]$$

Maple 已经把以上数值积分公式做成程序块，通过以下命令调用即可。

常用的 Maple 语句

evalf(int(f(x),x=a..b)

或　evalf (Int(f(x),x=a..b)):　　如果 Maple 无法解出积分的符号解，可用该命令求积分的数值解；

leftbox(f(x),x=a..b,n,options):　　画出 n 个用以逼近积分值的小矩形，积分区间为 a 到 b，而矩形的高度则由函数在矩形左边的值决定，我们称这些小矩形为左接矩形，即 leftbox；

leftsum(f(x),x=a..b,n):　　求出 n 个用以逼近积分值的小矩形的面积总和；

rightbox(f(x),x=a..b,n,options):　　画出右接小矩形来逼近定积分；

rightsum(f(x),x=a..b,n):　　求出右接小矩形的面积总和；

trapezoid(f(x),x=a..b,n):　　以梯形法求 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，取 n 个相等间距；

simpson(f(x),x=a..b,n):　　以辛普森法求 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，取 n 个相等间距。

实验演示：

例 1　计算积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的近似值。

解：由于积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的被积函数的原函数不是初等函数，且被积函数 $\mathrm{e}^{-x^2}>0$，所以定积分值等于对应的曲边梯形面积值。现在利用 Maple 的矩形积分命令求解。

1. 矩形法

先加载链接库：

```
> with(student);
```

建立函数关系：

```
> expr:=exp(-x^2);
```

$$expr := \mathrm{e}^{(-x^2)}$$

(1)　左接矩形法

用左接矩形命令，作出把区间[0，1]10 等分的左接矩形图，如图 4.1 所示。

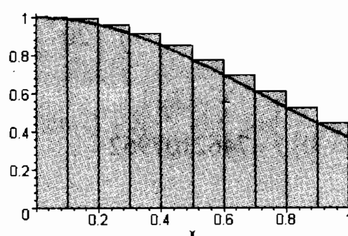


图 4.1　左接矩形图

> leftbox(expr,x=0..1,10);

求左接矩形面积的总和：

> leftsum(exp(-x^2),x=0..1,10);

$$\frac{1}{10}\left(\sum_{i=0}^{9} e^{\left(-\frac{1}{100}i^2\right)}\right)$$

> evalf(%);

$$.7778168241$$

(2) 右接矩形法

用右接矩形命令，作出把区间[0，1]10 等分的右接矩形图，如图 4.2 所示。

> rightbox(exp(-x^2),x=0..1,10);

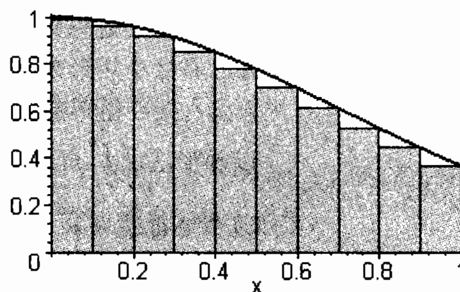


图 4.2　右接矩形图

求右接矩形面积的总和：

> rightsum(exp(-x^2),x=0..1,10);

$$\frac{1}{10}\left(\sum_{i=0}^{10} \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{100}i^2\right)}\right)$$

> evalf(%);

$$.7146047682$$

2. 梯形法

求把区间[0，1]10 等分的梯形面积总和：

> trapezoid(exp(-x^2),x=0..1,10);

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{10}\left(\sum_{i=0}^{9} \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{100}i^2\right)}\right)+\frac{1}{20}\mathrm{e}^{(-1)}$$

> evalf(%);

$$.7462107962$$

3. 抛物线法(辛普森法)

> simpson(exp(-x^2),x=0..1,10);

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{30}e^{(-1)}+\frac{2}{15}\left(\sum_{i=1}^{5}e^{(-(1/5i-1/10)^2)}\right)+\frac{1}{15}\left(\sum_{i=0}^{4}e^{(-\frac{1}{25}i^2)}\right)$$

> evalf(%);

$$.7468249480$$

例 2　求定积分 $\int_0^{2\pi}\sin(\cos(x))dx$ 的近似值。

解：

> expr:=sin(cos(x));

$$expr := \sin(\cos(x))$$

> leftbox(expr,x=0..2*Pi,20);

如图 4.3 所示。

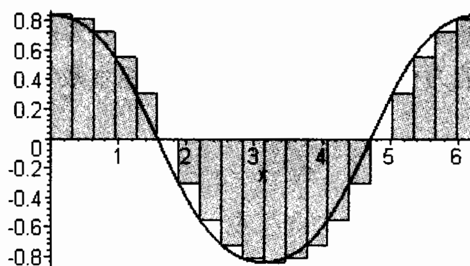


图 4.3　左接矩形图

> leftsum(expr,x=0..2*Pi,20);

$$\frac{1}{10}\pi\left(\sum_{i=0}^{19}\sin\left(\cos\left(\frac{1}{10}i\pi\right)\right)\right)$$

> evalf(%);

$$-.2513276123\quad 10^{-11}$$

> rightsum(expr,x=0..2*Pi,20);

$$\frac{1}{10}\pi\left(\sum_{i=1}^{20}\sin\left(\cos\left(\frac{1}{10}i\pi\right)\right)\right)$$

> evalf(%);

$$-.6283185308\quad 10^{-12}$$

> trapezoid(expr,x=0..2*Pi,20);

$$\frac{1}{20}\pi\left(2\sin(1)+2\left(\sum_{i=1}^{19}\sin\left(\cos\left(\frac{1}{10}i\pi\right)\right)\right)\right)$$

> evalf(%);

$$0.$$

```
> simpson(expr,x=0..2*Pi,20);
```

$$\frac{1}{30}\pi\left(2\sin(1)+4\left(\sum_{i=1}^{10}\sin\left(\cos\left(\frac{1}{10}(2i-1)\pi\right)\right)\right)+2\left(\sum_{i=1}^{9}\sin\left(\cos\left(\frac{1}{5}i\pi\right)\right)\right)\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$0.$$

实验二 数 值 微 分

问题：

一般的初等函数可以用有关的导数公式和相关的导数法则求出其导数，而当函数以离散数据形式给出时，就需要用数值微分的方法求导数。计算技术的进步不断地提高人们的数据分析能力，数据分析能力正在逐渐成为大学生的基本数学能力之一，而数值微分是培养数据分析能力的基础之一。

实验目的：

1. 掌握数值微分的两点公式和三点公式，并学会使用这些公式去求节点处的导数值及误差；
2. 初步了解 Mathcad 软件的基本概念，理解诸多等号的用法，掌握常用运算操作，学会用本节介绍 Mathcad 的基本操作方法去求数值微分。

实验准备：

1. 数值微分的两点公式和三点公式

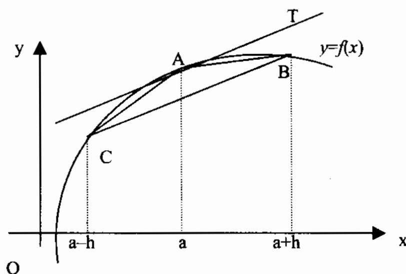


图 4.4 前差、后差公式和中点公式的几何意义

当函数以离散的数值形式给出时，用离散方法近似地计算函数 $y=f(x)$在某点 $x=a$ 的导数值。由导数定义，用差商近似微商(导数)，得

$$f'(a)\approx\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1}$$

$$f'(a)\approx\frac{f(a)-f(a-h)}{h} \tag{2}$$

其中 $h>0$。(1)和(2)分别称为前差公式和后差公式。求二者的平均值，得

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \tag{3}$$

(3)称为中心差商或中点公式，这是最常用的公式。$f'(a)$是切线 AT 的斜率，而(1)、(2)和(3)式的右端分别是割线 AB，AC 和 BC 的斜率。显然 BC 的斜率更接近于 AT 的斜率，即(3)式的精度更高。

为了估计这些近似公式的精度，将$f(a+h)$和$f(a-h)$在点 a 处作泰勒展开

$$f(a \pm h) = f(a) \pm hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \mathrm{O}(h^2)$$

将上式代入(1)～(3)式可知，(1)和(2)式的误差为 O(h)，而(3)式的误差为 $\mathrm{O}(h^2)$。

将区间$[a,b]n$ 等分，步长 $h=\frac{b-a}{n}$，当函数 $y=f(x)$在分点上用离散数值表示为$(x_k,y_k),a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 时，函数在分点的导数值可以由(3)式得到：

$$f'(x_k) \approx \frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}, k=1,2,\cdots,n-1 \tag{4}$$

但是对于端点 x_0 和 x_n，若用(1)和(2)式，有 $f'(x_0) \approx \frac{y_1-y_0}{h}$，$f'(x_n) \approx \frac{y_n-y_{n-1}}{h}$，误差为 $\mathrm{O}(h)$。

我们给出如下的带余项的两点公式：

$$\begin{cases} f'(x_0) = \frac{1}{h}(f(x_1)-f(x_0)) - \frac{h}{2}f'(\xi) \\ f'(x_1) = \frac{1}{h}(f(x_1)-f(x_0)) + \frac{h}{2}f'(\xi) \end{cases} \tag{5}$$

为了提高精度，用二次插值函数来代替曲线$f(x)$，则在 x_0 和 x_n 可以得到三点求导公式：

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi) \tag{6}$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi) \tag{7}$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi) \tag{8}$$

(6)～(8)统称为三点公式，(7)式也称作(三点)中点公式，其误差均为 $\mathrm{O}(h^2)$。

其中 $\xi \in [x_0, x_2]$。

从对公式的分析看，步长 h 越小，计算结果越精确，但这只是对截断误差角度而言的。若从舍入误差角度看，h 很小时，y_{k+1} 与 y_{k-1} 很接近，二者相减会造成有效数字的严重损失，因此 h 不宜过小。试看下面的例子。

例　求 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=2$ 处导数的近似值。

用(3)式计算 $f'(2) \approx \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{2h}$，取 4 位有效数字。当 h 取不同值时，结果如下：

表 4.1 导数值表

H	1	0.5	0.1	0.05	0.01
$f'(2)$	0.3660	0.3564	0.3535	0.3530	0.3500

而用求导公式算出的精确值(4 位有效字)为 0.3536，可以看出 h=0.1 时的结果最好。Mathcad 通常称为“数学 CAD”，是由美国 Mathsoft 公司开发出来的交互式教学应用软件。自 1986 年问世以来，一直受到科技工作者、教师和学生的喜爱。它操作简单，界面友好，具有第一流的公式编辑器。我们无需去记忆各种复杂的软件命令，一块数学模板(“View\Toolbars\Math”)上的按钮就已经包括了我们需要的绝大多数数学计算，看到这些按钮上的图标基本上就可以意会到它的用途。特别是它的输入输出方式与我们的书写习惯基本一致，因此成为数学教学中被广泛采用的软件之一。我们需要了解以下关于 Mathcad 的基本概念。

(1) Mathcad 的安装和启动

① 将源光盘插入光驱，在光盘的根目录下找到 Mathcad 的安装文件“setup.exe”；

② 鼠标双击该安装文件，按提示逐步安装；

③ 安装完成后，在程序栏里就有了“Mathcad”选项；

④ 通过路径“开始\程序\Mathcad”，便出现了 Mathcad Professional；

⑤ 进入 Mathcad 工作页面：在 Mathcad 图标上双击鼠标，便出现了 Mathcad 画面，关闭菜单“Tip of the Day”和“Resource center”，即进入 Mathcad 工作页面。

(2) 数学区域

在 Mathcad 工作页面中，任何有红色“+”光标的位置，无论在中英文哪种状态下，都是数学区域。数学区域的特点是：输入中文、英文或数字时都被蓝色编辑线半包围着，在数学区域内我们可以输入各种我们所需要的数学式子。

(3) 文本区域

创建文本区域时，在工作页面需要书写文字的地方单击鼠标，然后用键盘键入汉字、英文或数字。键入完毕后按动空格键，前面键入的文字就被一个带有手柄的矩形框起来了，一个文本区域就创建起来了，接下来继续输入文字和标点。也可以使用菜单命令创建文本区域：用鼠标单击需插入文本的地方，执行“Insert/Text Region”命令，产生文本区域框，框内光标为红色竖线时，就是文本区域了。

(4) 文本中插入数学区域

在一篇数学文稿中，文字叙述和数学公式不可避免地需要穿插进行，Mathcad 提供了在文本区域内插入数学区域的功能。插入的方法是：在文本中需插入数学区域的地方，执行菜单命令“Insert/Math Region”，就会出现一个占位符，在占位符处输入数学表达式即可。

(5) 在 Mathcad 环境中完成各种计算

表 4.2　等号汇总表

变量类型和操作	操作符	快捷键	操作方式	操作效果
局部单值变量赋值	:=	：或=	x 2	x:=2(x 取 2)
整形变量定义域赋值区域表示	:= ..	：或=	x 2；n	x:=2..n(取 2，3 到 n)
实型变量定义域赋值	:=	：或=	y.0,0.2;20	y.=0,0.2..20(0 到 20，间隔 0.2)
逻辑等号表示等量关系但不用于求值(俗称"粗等号")	▮=▮	Ctrl+=	Ctrl+=，左右分别输入 x+y、2	x+y=2
数值计算(普通等号)	=			x:=2 y:=2 x+y=5 或 2+3=5
符号计算，解析椎导的等号	→	Crtl+.	$(a+b)^2$→	(a+b) →a^2+2ab+b^2

(6)　常用运算操作简介

表 4.3　常用运算操作简介

运算名称	按　钮	快捷键	操作方式	操作效果
幂指数	x^y	^	x^2	x^2
下标表示	x_i	[	x [i	x_i
n 次方根	$\sqrt[n]{▮}$	Ctrl+\	Ctrl \ 3 x	$\sqrt[3]{x}$
平方根	$\sqrt{▮}$	\	\ 2	$\sqrt{2}$
乘	×	*	3 * x	$3\cdot x$
除	÷	/	3+x，按空格键，让蓝色编辑线包住被除式，/，2	$\frac{3+x}{2}$

实验演示：

例 1　用三点公式求$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$在 x=1.0、1.1 和 1.2 处的导数值，并估计误差。

解：写出三点公式

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]+\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

在 Mathcad 中计算如下：

1. 求出各节点的函数值

定义函数和各节点值：

$f(x) := \frac{1}{(1+x)^2}$ x0:=1.0 x1:=1.1 x2:=1.2 h:=0.1

求函数值：$f(x_0) = 0.250000$ $f(x_1) = 0.226757$ $f(x_2) = 0.206612$

 **注意：** (1)上面求函数值的等号是键盘等号键，这是 Mathcad 求数值解的重要手段，若要求符号解，则应使用“Symbolics”菜单中的按钮“→”。

(2)计算结果的调整:按路径“Format\Resul”可以看到系统默认精度为三位有效数字，可以调整成你所需要的有效数字位数，最多 15 位，结果也可以不选指数幂的形式。

2. 利用三点公式求出两个端点 x0、x2 的导数值

$$\frac{1}{2h} \cdot [(-3) \cdot f(x_0)+4 \cdot f(x_1)-f(x_2)]= -0.247910 \quad (a)$$

即 $f'(x_0) \approx -0.247910$

操作提示：

(1) 上式“$\frac{1}{2h}\cdot$”后输入的是左圆括号；

(2) 输好$f(x_2)$中的右边圆括号后，用蓝色编辑线包住(1)中所述左圆括号后的所有内容，再输入最右边的圆括号，这时最外层圆括号变为了方括号；

(3) 把蓝色编辑线移到右方括号的右侧，再敲空格键，让蓝色编辑线包住所有参加计算的内容，再敲键盘等号键就出现运算结果了。

$$\frac{1}{2h} [f(x_0)-4 \cdot f(x_1)+3 \cdot f(x_2)]= -0.185974 \quad (b)$$

即 $f'(x_2) \approx -0.185974$

再利用中点公式求出点 x_1 的导数值：

$$\frac{1}{2h} (-f(x_0)+f(x_2))= -0.21694215 \quad (c)$$

即 $f'(x_1) \approx -0.216942$

以上(a)、(b)、(c)就是利用三点公式求 $x0, x2, x1$ 点处导数的近似结果。

3. 求各点导数的精确值

这一步是为了评估数值微分的结果。先求$f(x)$的导函数，定义 x 的取值为等差数列，注意格式要求。

$$\frac{d}{dx} f(x) \to \frac{-2}{(1+x)^3} \qquad \frac{d^3}{dx^3} f(x) \to \frac{-24}{(1+x)^5} \qquad x := 1.0, 1.1 .. 1.2$$

再定义一阶导函数，之后输入$f1(x)$，敲键盘等号键就有结果显示了。结果以电子表格的形式表达，特别适用于大量的函数计算。

$$f1(x) := \frac{-2}{(1+x)^3} \qquad f3(x) := \frac{-24}{(1+x)^5}$$

f1(x) =

-0.250000
-0.215959
-0.187829

f3(x) =

-0.750000
-0.587645
-0.465691

4. 误差计算

在截断误差的求取中，三阶导数取最大值，则得最大误差。

(1) 理论误差：

$$f'''(\xi_i) \le \max_{1.0 \le x \le 1.2} |f'''(x)| = \left|\frac{-24}{(1+x)^5}\right| = \frac{24}{2^5} = 0.75$$

(2) 截断误差：

$$\frac{h^2}{3} \cdot 0.75 = 2.50000000 \times 10^{-3} \qquad \frac{h^2}{6} \cdot 0.75 = 2.50000000 \times 10^{-3}$$

5. 列表评估数值微分的结果

上述结果列表如下，如表 4.4 所示。

表 4.4　列表评估数值微分

x	1.0	1.1	1.2
三点公式	−0.24792	−0.21693	−0.18596
准确$f'(x)$	−0.25000	−0.21596	−0.18783
理论误差限	0.00250	0.00215	0.00250
实际误差限	0.00208	0.00098	0.00187

我们看到用三点公式算出来各节点的导数值与其精确值相差无几，也就是说实际误差比理论误差要小得多。实际工作中我们只能根据理论误差去控制误差，这就是对截断误差取最大值的原因。

例 2　已知$f(x)=\ln(x)$，利用两点公式计算$f'(1.8)$的近似值，依次取$h=10^n$ ($n=0,-1,\cdots,-12$)。

解：定义函数：$f(x) := \ln(x)$　(1)

定义步长：$h(n) := 10^n$　　$n := 0,-1..-12$　(2)

定义两点公式的 f '(1.8)：

两点公式为$f'(1.8) \approx \dfrac{f(1.8+h)-f(1.8)}{h}$　　$g(h) := \dfrac{f(1.8+h)-f(1.8)}{h}$　(3)

即：$f'(1.8) = g(h)$

定义一阶导函数：$\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$　(4)　　$f1(x) := \dfrac{1}{x}$　(5)

定义二阶导函数：$\dfrac{d^2}{dx^2}\ln(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ (6) $\quad$ $f2(x) := \dfrac{-1}{x^2}$ (7)

定义误差函数：

截断误差 $|E(1.8)| \le \dfrac{h}{2}\max\limits_{1.8\le x\le 1.8+h}|f''(x)| = \dfrac{h}{2\cdot 1.8^2} = \dfrac{h}{6.48}$ $\quad$ $E(h) := \dfrac{h}{6.48}$ (8)

求值：

(9) 步长

h(n) =

h(n)
1.00000000
0.10000000
0.01000000
1.00000000 0^{-3}
1.00000000 0^{-4}
1.00000000 0^{-5}
1.00000000 0^{-6}
1.00000000 0^{-7}
1.00000000 0^{-8}
1.00000000 0^{-9}
1.00000000 0^{-10}
1.00000000 0^{-11}
1.00000000 0^{-12}

(10) f'(1.8)的近似值

g(h(n)) =

g(h(n))
0.44183275
0.54067221
0.55401804
0.55540129
0.55554012
0.55555401
0.55555540
0.55555554
0.55555555
0.55555560
0.55555560
0.55555560
0.55555560

(11) 理论误差

E(h(n)) =

E(h(n))
0.15432099
0.01543210
1.54320988 0^{-3}
1.54320988 0^{-4}
1.54320988 0^{-5}
1.54320988 0^{-6}
1.54320988 0^{-7}
1.54320988 0^{-8}
1.54320988 0^{-9}
1.54320988 0^{-10}
1.54320988 0^{-11}
1.54320988 0^{-12}
1.54320988 0^{-13}

(12) 相邻两次近似值的差

g(h(n − 1)) − g(h(n)) =

g(h(n − 1)) − g(h(n))
0.09883946
0.01334582
1.38325414 0^{-3}
1.38832328 0^{-4}
1.38883216 0^{-5}
1.38877798 0^{-6}
1.39332990 0^{-7}
5.55111512 0^{-9}
5.55111512 0^{-8}
0.00000000
0.00000000
0.00000000
-4.44089210 0^{-4}

而 $f'(1.8)$的准确值为 $f1(1.8) = 0.55555556$ (13)

与准确值相比，h=10^{-8}时，$f'(1.8)\approx 0.55555555$，精确度最高。我们看到步长并不是越小越好。

 **注意：** 本题中(1)~(13)式是计算式或与计算密切相关的式子,其余式子只是表达式。

读者需体会各种情况下等号的不同的功能。

例 3　给出如下函数表 4.5，利用三点公式求各节点的数值导数。

表 4.5　数值函数表

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x_i)$	1.2051709	1.4214028	1.6498588	1.8918247	2.1487213	2.4221188

解：h=0.1，先求两个端点的导数表达式：

$$f'(x0) \approx \frac{1}{2h}(-3\cdot f(x0)+4\cdot f(x1)-f(x2))$$

$$f'(x5) \approx \frac{1}{2h}(f(x3)-4\cdot f(x4)+3\cdot f(x5))$$

x := 0.1,0.2..0.6　　h := 0.1

f0 := 1.2051709　　f1 := 1.4214028　　f2 := 1.6498588

f3 := 1.8918247　　f4 := 2.1487213　　f5 := 2.4221188

在 Mathcad 中计算各节点的导数值如下。

用公式(6)和(8)计算端点的导数值：

$$f10 \approx \frac{1}{2h}(-3\cdot f0+4\cdot f1-f2)= 2.10119850$$

$$f15 \approx \frac{1}{2h}(f3-4\cdot f4-3\cdot f5)= 2.81648550$$

注意： (1) 这里 $fi\ (i=0,1,\cdots,5)$表示函数值 $f(x_i)$，而这里及下文的 $f1i$ 表示函数 $f(x)$的一阶导数在 xi 处的值，这是由于 Mathcad 函数名定义的需要。

(2) 以上两个式子中的等号"="均为键盘等号，这两个等号具有计算功能，因此对等式左边的函数名定义要求也是很严格的。

利用中点公式(7)计算其余各节点的导数值：

$$f'(x1)\approx \frac{1}{2h}(-f(x0)+f(x2))　　f11 \approx \frac{1}{2h}(-f0+f2)=2.22343950$$

$$f'(x2)\approx \frac{1}{2h}(-f(x1)+f(x3))　　f12 \approx \frac{1}{2h}(-f1+f3)=2.35210950$$

$$f'(x3)\approx \frac{1}{2h}(-f(x2)+f(x4))　　f13 \approx \frac{1}{2h}(-f2+f4)=2.49431100$$

$$f'(x4)\approx \frac{1}{2h}(-f(x3)+f(x5))　　f14 \approx \frac{1}{2h}(-f3+f5)=2.65147050$$

将节点及其对应的导数值的计算结果整理到下表中，如表 4.6 所示。

表 4.6　导数计算结果

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x_i)$	2.10119850	2.22343950	2.35210950	2.49431100	2.65147050	2.81648550

实验三　人口增长率的研究

问题：

探讨数值积分与微分在研究人口问题中的应用。

实验目的：

对实际问题中的离散数据，学会用 Mathcad 命令求其数值微分、数值积分，了解在人口问题中进行数据分析的方法，培养解决实际问题和数学建模的意识。

实验准备：

理解数值微分、数值积分的意义，掌握数值微分的三点公式，数值积分的梯形公式，继续熟悉关于 Mathcad 语句的输入方法以解决数值微分、数值积分的运算。

实验演示：

已知 20 世纪某国家人口统计数据如下表，试计算下表中这些年份的人口增长率。

表 4.7　20 世纪某国家人口统计数据

年份	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
人口 (百万)	76.0	92.0	106.5	123.2	131.7	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4

试求各年人口增长率，并用梯形积分公式计算该国 1980、1990 年的人口数量。

解：Malthus 生物总数增长定律说：在孤立群体中，生物总数的变化率为 $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{dt}=r(t)\cdot x(t)$。

若记时刻 t 的人口为 $x(t)$，则人口的相对增长率为 $r(t)=\dfrac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x(t)}$，对 1900，1910，…，1990 依次记为 k=0,1,2,…,9。相应地，人口记为 x_k，年增长率记为 r_k，用数值微分的三点公式：

中间各节点导数值：

$$r_t=\frac{r_{t+1}-r_{t-1}}{2\cdot(10h)}=\frac{x_{t+1}-x_{t-1}}{20\cdot x_t}\qquad t=1,2,\cdots,8 \tag{1}$$

两个端点的导数值：

$$r_0=\frac{-3\cdot x_0+4\cdot x_1-x_2}{20x_0} \tag{2}$$

$$r_9=\frac{x_7+4\cdot x_8+3\cdot x_9}{20x_9} \tag{3}$$

显然，(1)式中 8 个值的计算量很大，所以我们在 Mathcad 中进行计算，具体操作方法如下。

1. 先定义各年人口数。

$x_0 := 76.0$　　$x_1 := 92.0$　　$x_2 := 106.5$　　$x_3 := 123.2$　　$x_4 := 131.7$

$x_5 := 150.7$　　$x_6 := 179.3$　　$x_7 := 204.0$　　$x_8 := 226.5$　　$x_9 := 251.4$

$r(t) := \frac{x_{t+1} - x_{t-1}}{20 \cdot x_t}$　　$t := 1..8$

r(t) =

0.0166
0.0146
0.0102
0.0104
0.0158
0.0149
0.0116
0.0105

$$r_0 = \frac{-3 \cdot x_0 + 4 \cdot x_1 - x_2}{20 \cdot x_0} = 0.022 \qquad r_9 = \frac{x_7 - 4 \cdot x_8 + 3 \cdot x_9}{20 \cdot x_9} = 0.0104$$

即　r_0=0.022　　r_9=0.0104

结果分析：

表 4.8

年份	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
r_t(%)	2.20	1.66	1.46	1.02	1.04	1.58	1.49	1.16	1.05	1.04

由表 4.8 中可以看出，20 世纪该国人口增长率总的来说在下降，30 年代和第二次世界大战时人口增长率显著下降，战后又迅速上升。

2. 仍然沿用上面的记号，为进行数值积分，要定义 $r(t)$。

$r_1 := 0.0166$　　$r_2 := 0.0146$　　$r_3 := 0.0102$　　$r_4 := 0.0104$

$r_5 := 0.0158$　　$r_6 := 0.0149$　　$r_7 := 0.0116$　　$r_9 := 0.0105$

又因为人口增长满足微分方程：$\frac{dx}{dt} = r(t) \cdot x(t)$，其通解为：

$$x(t) = c \cdot e^{\int_0^t r(u)du} \qquad \int_0^t r(u)du = T_n = h\sum_{t=1}^{n-1} r_t + \frac{h}{2}(r_0 + r_n) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

代入初始条件：

$x(0)=x_0$，$t=0$ 时，$r=0$，所以 $c=x_0$ 于是时刻 t 的人口 $x(t)=x_0 e^{\int_0^t r(u)du}$。

利用梯形求积公式，得：

$$\int_0^t r(u)\mathrm{d}u = T_n = h\cdot\sum_{t=1}^{n-1} r_t + \frac{h}{2}(r_0 | r_n),\quad h=\frac{b-a}{n}$$

说明：

(1) 上面等式的三个等号均表示等量关系，没有计算作用；

(2) 第一个等号是文本区域的等号，后面两个“粗等号”是数学区域的等号，这两类等号共同的特点是：没有计算作用。

所以 $h := 10$　　$t := 1..7$　　$\dfrac{x_6 - 4x_7 + 3x_8}{20x_8} = 9.448\times10^{-3}$

即端点 r_8 的值为 $r_8 := 9.448\times10^{-3}$

完整地表达出来，就是：

$$\int_0^8 r(u)\mathrm{d}u \overset{(1)}{=} h\Big(\sum_{t=1}^{7} r_t\Big) + \frac{h}{2}(r_0 + r_8) \overset{(2)}{=} 1.098$$

$$x(8) \overset{(3)}{=} x_0 e^{1.098} \overset{(4)}{=} 227.86$$

说明：

上面 4 个等号中(1)、(3)两个等号是在文本区域内输入的等号，只起表示等量关系的作用，没有计算作用；(2)、(4)两个等号是在数学区域内输入的等号，它们既有表示等量关系的作用又有计算的作用。

$$\int_0^9 r(u)\mathrm{d}u = h\sum_{t=1}^{8} r_t + \frac{h}{2}(r_0 + r_9) = 1.197$$

$$x(9) = x_0 e^{1.197} = 251.573$$

经过以上计算知道，该地区 1980 年人口约为 227.86 百万，1990 年人口约为 251.573 百万，这两个数据与实际比较接近。

习　题　四

1. 用矩形、梯形和辛普森三种公式计算由下表数据给出的积分 $\int_{0.3}^{1.5} y(x)\mathrm{d}x$。已知表数据为函数 $y=x+\sin\dfrac{x}{3}$ 所产生的，将计算值与精确值作比较。

k	1	2	3	4	5	6	7
x_k	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5
y_k	0.3895	0.6598	0.9147	1.1611	1.3971	1.6212	1.8325

2. 选取 n=100，1000，10000，…等，用梯形公式和辛普森公式计算 $\pi = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的

近似值，观察 n 值增加所导致的 S 值的变化情况，直到 n 的增加所导致的 S 值的变化小于给定的误差。比较同一个 n 值下梯形公式和辛普森公式计算结果的差别，对两种方法的精确差度别获得一个感性认识。

3. 已知函数 $y=e^x$ 的下列数值

X	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
Y	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

试用三点微分公式计算 $x=2.7$ 处的一阶导数值。

4. 给定函数表如下：

x_k	0.5	0.6	0.51	0.501	0.5001	0.50001
$x_k=\sqrt{1-x_k^{\ 2}}$	0.866025403	0.8	0.865447283	0.865447283	0.865987661	0.865993648

分别取 $h=10^n(n=-1,-2,-3,-4,-5)$，用两点公式求 $f'(0.5)$，并注意观察 h 值对 $f'(0.5)$ 精度的影响。

5. 已知函数表

x_i	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$f'(x_i)=\dfrac{1}{(1+x_k)^2}$	0.2500	0.2268	0.2066	0.1890	0.1736

试分别利用两点及三点公式求 $f(x)$ 在 $x=1.0,1.2$ 处的导数值，并注意观察 h 值对 $f'(x)$ 精度的影响。

第 5 章　常微分方程

在实际工作中，我们经常遇到这样一类问题：已知物体在一定条件下运动，要寻求它的运动规律。而物体的运动规律在数学上是用函数来描述的，因此，寻求物体运动的规律与它运动的速度(即未知函数的导数)密切相关。因而根据实际问题列出含有未知函数导数的方程——微分方程，然后解出微分方程，从而解决问题。

我们这一章的实验就是学会利用 Maple 软件来解常微分方程。因此我们首先要了解常微分方程的概念，同时还要了解它的几种常用解法以及它的解的性质等。

实验一　微分方程的通解

问题：

解微分方程就是求微分方程的通解或特解，在数学课上我们已经学习了变量可分离的微分方程、一阶线性微分方程、齐次微分方程、可降阶的高阶微分方程、二阶常系数线性微分方程等多种类型的微分方程的解法。不同的类型采用不同的解法，有的还要通过公式求解，解起来比较繁琐。本实验我们在计算机上通过 Maple 软件来讨论微分方程的通解。

实验目的：

学会运用 Maple 软件求一阶微分方程、可降阶的高阶微分方程、二阶线性微分方程等微分方程的通解。

实验准备：

理解本实验中的以下 Maple 命令：

dsolve(eqn,y(x))：	解常微分方程式，解为函数 $y(x)$；
dsolve({eqn,conds},y(x))：	解包含有初始条件的常微分方程式；
diff(y(x),x)：	表示 dy/dx，即 y 对 x 的一阶导数；
diff(y(x),x$2)：	表示 d^2y/dx^2，即 y 对 x 的二阶导数；
_C1,_C2：	表示通解中的任意常数；
subs(x=a,expr)：	将 expr 中所有的 x 均以 a 来代换；
suba([x1=a1,x2=a2,…xn=an],expr)：	同时执行数个代换；
map(f,expr)：	将函数 f 映射到表达式 expr 中的元素中去。

实验演示：

1. 解一阶微分方程

例 1　求一阶微分方程 $y'-e^y\sin(x)=0$ 的通解。

解：

```
> eqn1:=diff(y(x),x)-exp(y(x))*sin(x)=0;
```

$$eqn1 := \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) - e^{y(x)} \sin(x) = 0$$

```
> dsolve(eqn1,y(x));
```

$$y(x) = \ln\left(-\frac{1}{-\cos(x) + _C1}\right)$$

例 2　求一阶微分方程 $xyy'+1=y^2+yy'$ 的通解。

解：

```
>   eqn2:=x*y(x)*D(y)(x)+1=(y(x))^2+y(x)*(D(y)(x)) ;
```

$$eqn2 := xy(x)D(y)(x) + 1 = y(x)^2 + y(x)D(y)(x)$$

```
> dsolve(eqn2,y(x));
```

$$y(x) = \sqrt{1 + _C1x^2 - 2_C1x + _C1}, y(x) = -\sqrt{1 + _C1x^2 - 2_C1x + _C1},$$

```
> eqn2:="eqn2":
> eqn2:=diff(y(x),x)=((y(x))^2-1)/(y(x)*(x-1));
```

$$eqn2 := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{-1 + y(x)^2}{y(x)(x-1)}$$

```
> dsolve(eqn2,y(x),implicit);
```

$$y(x)^2 - \left(\frac{1}{(x-1)^2} + _C1\right)(x-1)^2 = 0$$

例 3　求微分方程 $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ 的通解。

解：

```
> eqn3:=x*diff(y(x),x)=y(x)*(1+ln(y(x))-ln(x));
```

$$eqn3 := x\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) = y(x)(1 + \ln(y(x)) - \ln(x))$$

```
> dsolve(eqn3,y(x));
```

$$y(x) = \frac{x}{e^{(_C1x)}}$$

```
> dsolve(eqn3,y(x),implicit);
```

$$-\frac{\ln(y(x))}{x} + \frac{\ln(x)}{x} _C1 = 0$$

例 4　求微分方程 $y' = (x - y)^2 + 1$ 的通解。

解：

```
> eqn4:=diff(y(x),x)=(x-y(x))^2+1;
```

$$eqn4 := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = (x - y(x))^2 + 1$$

> dsolve(eqn4,y(x));

$$y(x) = \frac{-1 + x^2 + _C1x}{x + _C1}$$

以上例 3、例 4 是非线性微分方程，Maple 仍能求出符号解来，Maple 的符号求解能力从中可见一般。

例 5　求微分方程 $y'\cos x + y\sin x = 1$ 的通解。

解：

> eqn5:=(cos(x))*diff(y(x),x)+(sin(x))*(y(x))=1;

$$eqn5 := \cos(x)\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) + \sin(x)y(x) = 1$$

> dsolve(eqn5,y(x));

$$y(x) = \cos(x)\tan(x) + \cos(x)_C1$$

> map(subs,{_C1=1,_C1=2,_C1=3,_C1=4},rhs(%));

$$\{\cos(x)\tan(x) + 4\cos(x), \cos(x)\tan(x) + \cos(x), \cos(x)\tan(x) + 2\cos(x), \cos(x)\tan(x) + 3\cos(x)\}$$

> plot(%,x=-5..5);

函数图像如图 5.1 所示。

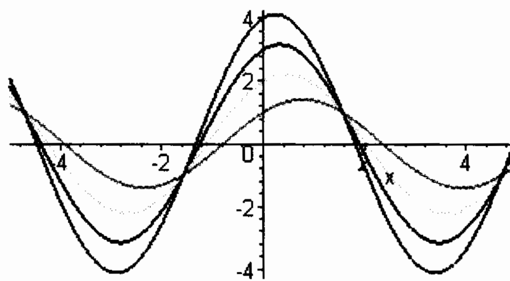


图 5.1　函数 y' cosx+ysinx=1 曲线图

画出了通解的积分曲线族后，你知道对应 $y(0)=2$ 的解是哪一条曲线吗？由于在计算机上这个图形是四色图，很容易回答这个问题。

2. 解可降阶的高阶微分方程

例 6　求微分方程 $y'''=\sin x + x$ 的通解。

解：

> eq:=diff(y(x),x$3)=sin(x)+x;

$$eq := \frac{\partial^3}{\partial x^3} y(x) = \sin(x) + x$$

> dsolve(eq,y(x));

$$y(x)=\frac{1}{24}x^4+\cos(x)+\frac{1}{2}_C1x^2+_C2x+_C3$$

例 7　求微分方程 $y'=\frac{y'}{x}+x$ 的通解。

解：

```
> eq1:=diff(y(x),x$2)=1/x*(diff(y(x),x))+x;
```

$$eq1:=\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x)=\frac{\frac{\partial}{\partial x}y(x)}{x}+x$$

```
> dsolve(eq1,y(x));
```

$$y(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}_C1x^2+_C2$$

3. 解二阶常系数微分方程

(1)　二阶常系数齐次微分方程的解。

例 8　求微分方程 $y''+5y'+6y=0$ 的通解。

解：

```
> eq2:=diff(y(x),x$2)+5*diff(y(x),x)+6*y(x)=0;
```

$$eq2:=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x)\right)+5\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right)+6y(x)$$

```
> dsolve(eq2,y(x));
```

$$y(x)=_C1\mathbf{e}^{(-3x)}+_C2\mathbf{e}^{(-2x)}$$

(2)　二阶常系数非齐次微分方程的解。

例 9　求微分方程 $y''+6y'+9y=5xe^{-3x}$ 的通解。

解：

```
> eq3:=diff(y(x),x$2)+6*diff(y(x),x)+9*y(x)=5*x*exp(-3*x);
```

$$eq3:=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x)\right)+6\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right)+9y(x)=5x\mathbf{e}^{(-3x)}$$

```
> dsolve(eq3,y(x));
```

$$y(x)=\mathbf{e}^{(-3x)}_C2+x\mathbf{e}^{(-2x)}_C1+\frac{5}{6}x^3\mathbf{e}^{(-3x)}$$

例 10　求微分方程 $y''+3y'+2y=e^{-x}\cos x+x$ 的通解。

解：

```
> eq4:=diff(y(x),x$2)+3*diff(y(x),x)+2*y(x)=exp(-x)*cos(x)+x;
```

$$eq4:=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x)\right)+3\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right)+2y(x)=\mathbf{e}^{(-3x)}\cos(x)+x$$

```
> dsolve(eq4,y(x));
```

$$y(x)=\left(\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\mathbf{e}^{x}x+\frac{3}{4}\mathbf{e}^{x}-\mathbf{e}^{(-x)}_C1+_C2\right)\mathbf{e}^{(-x)}$$

例 11　求微分方程 $m s''=mg$ 的通解。

解：

```
> eqn:=m*diff(s(t),t$2)=m*g;
```

$$eqn:=m\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}s(t)\right)=mg$$

```
> dsolve(eqn,s(t));
```

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+_C1t+_C2$$

实验二　微分方程的特解

问题：

我们在实验一中讨论了微分方程的通解，但是在实际应用中往往有初始条件，利用初始条件，我们可以确定通解中的常数，从而解出满足给定条件的微分方程的特解。

实验目的：

学会运用 Maple 软件求给出初始条件的一阶微分方程、可降阶的高阶微分方程、二阶线性常系数微分方程的特解。

实验准备：

1. 熟悉上述微分方程的求解公式及有关方法；
2. Maple 中的有关命令：

dsolve({eqn，ini}，y(x))：	求初始条件为 ini 的微分方程 eqn 的解 $y(x)$。eqn 表示微分方程，ini 表示初始条件，它们都使用赋值语句定义；
combine()：	化简微分方程解的输出。

实验演示：

1. 一阶微分方程的特解

例 1　求微分方程$(1+e^x)yy'=e^x$满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解。

解：

```
> eq:=(1+exp(x))*y(x)*diff(y(x),x)=exp(x);
```

$$eq:=(1+\mathbf{e}^{x})y(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right)=\mathbf{e}^{x}$$

```
> ini:=y(0)=1;
```

$$ini := y(0) = 1$$

```
> dsolve({eq,ini},y(x));
```

$$y(x) = \sqrt{2\ln(1+e^x) - 2\ln(2) + 1}$$

例 2 求微分方程 $y'x^2+2xy-x+1=0$ 满足初始条件 $y(1)=0$ 的特解。

解：

```
> eq1:=x^2*D(y)(x)+2*x*y(x)-x+1=0;
```

$$eq1 := x^2 D(y)(x) + 2xy(x) - x + 1 = 0$$

```
> in1:=y(1)=0;
```

$$in1 := y(1) = 0$$

```
> dsolve({eq1,in1},y(x));
```

$$y(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}}{x^2}$$

例 3 求微分方程 $y'\cos x + y\sin x = \cos^2 x$ 满足初始条件 $y(\pi)=1$ 的特解。

解：

```
> eq2:=cos(x)*diff(y(x),x)+y(x)*sin(x)=cos(x)^2;
```

$$eq2 := \cos(x)\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) + y(x)\sin(x) = \cos(x)^2$$

```
> in2:=y(pi)=1;
```

$$in2 := y(\pi) = 1$$

```
> dsolve({eq2,in2},y(x));
```

$$y(x) = \cos(x)x + \frac{\cos(x)(-\cos(\pi)\pi + 1)}{\cos(\pi)}$$

例 4 求微分方程 $y-xy'=b(1-x^2y'')$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解。

解：

```
> eq4:=y(x)-x*diff(y(x),x)=b*(1-x^2*(diff(y(x),x)));
```

$$eq4 := y(x) - x\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) = b\left(1 - x^2\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)\right)$$

```
> in4:=y(1)=1;
```

$$in4 := y(1) = 1$$

```
> dsolve({eq4,in4},y(x));
```

$$y(x) = \frac{\left(-\frac{b}{x} + 2b - 1\right)x}{-1 + bx}$$

2. 阶线性微分方程的特解

(1) 二阶线性齐次微分方程的特解

例 5 求微分方程 $y''+3y'-4y=0$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的特解。

解：

```
> eqn:=diff(y(x),x$2)+3*diff(y(x),x)-4*y(x)=0;
```

$$eqn := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x)\right)+3\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right)-4y(x)=0$$

```
> dsolve(eqn,y(x));
```

$$y(x)=_C1\mathbf{e}^{(-4x)}+_C2\mathbf{e}^{x}$$

```
> dsolve({eqn,y(0)=1,D(y)(0)=0},y(x));
```

$$y(x)=\frac{1}{5}\mathbf{e}^{(-4x)}+\frac{4}{5}\mathbf{e}^{x}$$

```
> plot(1/5*exp(-4*x)+4/5*exp(x),x=-1..1);
```

这是特解的图像，如图 5.2 所示。

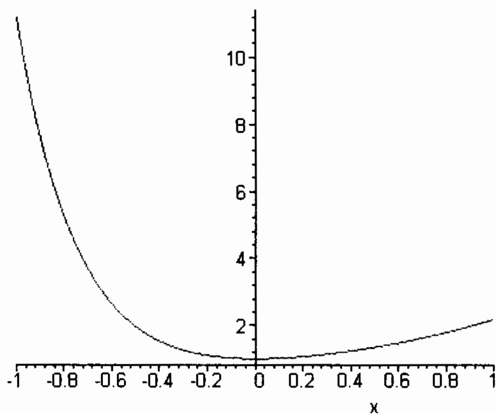


图 5.2 例 5 微分方程特解图

例 6 求微分方程 $3y''+y'+2y=0$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的特解。

解：

```
> eq:=3*diff(y(x),x$2)+diff(y(x),x)+2*y(x)=0;
```

$$eq := 3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right)+2y(x)=0$$

```
> dsolve({eq,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(x));
```

$$y(x)=\frac{6}{23}\sqrt{23}\mathbf{e}^{(-1/6x)}\sin\left(\frac{1}{6}\sqrt{23}x\right)$$

```
> plot(rhs(%),x=0..15);
```

这是特解的图像，如图 5.3 所示。

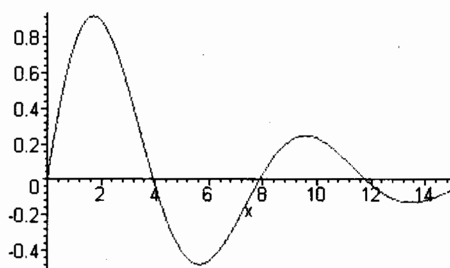


图 5.3 例 6 微分方程特解图

2. 二阶线性非齐次微分方程的特解

例 7 求微分方程 $y''+y=2x^2-3$ 的通解及满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=2$ 的特解。

解：

```
> eq:=diff(y(x),x$2)+y(x)=2*x^2-3;
```

$$eq:=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x)\right)+y(x)=2x^2-3$$

```
> sol:=dsolve(eq,y(x));
```

$$sol:=y(x)=\sin(x)_C1+\cos(x)_C2-7+2x^2$$

这是要求的通解；

```
> dsolve({eq,y(0)=1,D(y)(0)=2},y(x));
```

$$y(x)=2\sin(x)+8\cos(x)-7+2x^2$$

这是要求的特解；

```
> plot(rhs(%),x=-3..3);
```

这是特解图形，如图 5.4 所示，注意 x=0 时 y=1，与初始条件吻合。

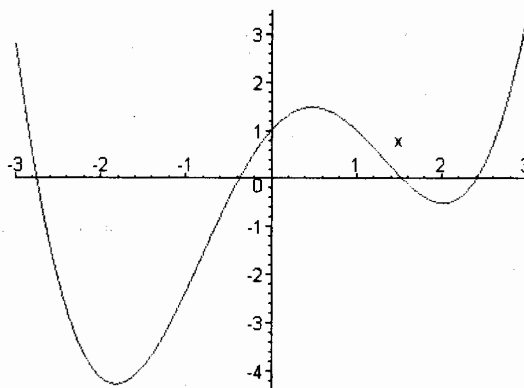


图 5.4 例 7 微分方程特解图

例 8 求微分方程 $y''-10y'+9y=e^{2x}$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=\frac{6}{7}$，$y'\big|_{x=0}=\frac{33}{7}$ 的特解。

解：

```
> eq:=diff(y(x),x$2)-10*diff(y(x),x)+9*y(x)=exp(2*x);
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) - 10\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) + 9y(x) = \mathrm{e}^{(2x)}$$

```
>   dsolve({eq,y(0)=6/7,D(y)(0)=33/7},y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(9x)} - \frac{1}{7}\mathrm{e}^{(2x)}$$

```
> plot(rhs(%),x=-1/3..1/3);
```

由于已知特解，所以选上述 x 的取值范围作图，如图 5.5 所示。也可以任意选择作图范围，充分地试验，就可以找到最能全面表现函数性质的区间。

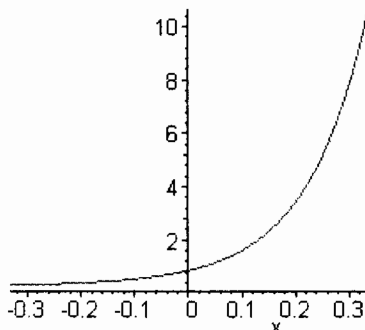


图 5.5 例 8 微分方程特解图

实验三 核废料处理问题的建议

问题：

美国原子能委员会以往处理核废料的方法是把它们装入密封的器皿中，然后扔到海里。但当器皿下沉的速度超过 12.2 m/s 时，若与海底相撞，器皿可能发生破裂。我们要考虑：在一定的条件下，器皿速度是否小于 12.2 m/s，如何才能保证器皿的速度小于 12.2 m/s?

实验目的：

使学生进一步掌握常微分方程通解、特解的求法，并掌握用 Maple 语句求解常微分方程。初步学习建立数学模型和检验数学模型的方法。

实验准备：

常微分方程的理论及有关求解微分方程的 Maple 命令。

实验演示：

美国原子能委员会以往把核废料装入密封的圆桶里，然后扔到水深为 90 多米的海底。生态学家和科学家们担心的是：当圆桶下沉到海底时，与海底发生碰撞而破裂，从而造成核污染。但原子能委员会曾说这是不可能的。为此，工程师们做了碰撞实验，发现当圆桶

下沉速度超过 12.2 m/s 与海底相碰时，圆桶碰裂。需要计算一下以下情况圆桶沉到海底时速度是多少？已知圆桶重量为 239.46 kg，体积为 0.2058 m^3，海水密度为 1035.71 kg/m^3，如果水桶速度小于 12.2 m/s，假设水的阻力与圆桶下沉速度大小成正比，常数 $k = 0.6$。就说明这种方法是安全可靠的，否则就要禁止用这种方法来处理放射性废料。

我们的问题是：

(1) 这种处理废料的方法是否合理？

(2) 如何合理改变已知条件，使速度 v<12.2 m/s?

1. 建立数学模型

(1) 先求出圆桶的运动规律，解出位移函数 $s(t)$和速度函数 $v(t)$。由于圆桶在运动过程中受到本身的重力 G、水的浮力 F、水的阻力 f 的作用，所以

$$F_{合} = G - F - f \tag{1}$$

根据牛顿运动定律得到下面的方程：$F_{合} = ma = m\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ 又因为，$G=mg$，$F=pgW$，$f=kv=k\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，可得圆桶的位移和速度分别满足下面的微分方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = mg - pgw - k\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

改写(2)式，得：

$$\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - pgw - kv \tag{3}$$

(2) 若水的阻力与圆桶下沉速度平方成正比，这时圆桶受到的阻力应改写为 $f=k(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^2$，类似上面，可得这时圆桶的速度应满足如下微分方程：

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - pgw - kv^2 \tag{4}$$

2. 计算过程

在 Maple 中计算如下。

定义方程(2)，并给该方程取名“eq”：

```
> eq:=m*diff(s(t),t$2)=m*g-p*g*w-k*diff(s(t),t);
```

$$eq := m\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}s(t)\right) = mg - pgw - k\left(\frac{\partial}{\partial t}s(t)\right)$$

定义初始条件

$s(0)=0$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v(0) = 0$：

```
> ini:=s(0)=0,D(s)(0)=0;
```

$$ini := s(0) = 0, D(s)(0) = 0$$

求方程(2)的特解：

```
> sol:=dsolve({eq,ini},s(t));
```

$$sol1 := s(t) = \frac{g(m-pw)m\mathrm{e}^{\left(-\frac{kt}{m}\right)}}{k^2} + \frac{tgm}{k} - \frac{tgpw}{k} - \frac{g(m-pw)m}{k^2}$$

把条件 m=239.46,w=0.2058,g=9.8,p=1035.71,k=0.6 带入上式，求出 $s(t)$的数值解：

```
>subs(m=239.46,w=0.2058,g=9.8,p=1035.71,k=0.6,s(t)=rhs(sol));
```

$$s(t) = 171510.9925\mathrm{e}^{(-.002505637685t)} + 429.7444068t - 171510.9925 \tag{5}$$

定义方程(3)，并给该方程取名“eq1”：

```
> eq1:=m*diff(v(t),t)=m*g-p*g*w-k*v(t);
```

$$eq1 := m\left(\frac{\partial}{\partial t}v(t)\right) = mg - pgw - kv(t)$$

求初始条件为 $v(0)=0$ 的微分方程(3)的特解：

```
> so2:=dsolve({eq1,v(0)=0},v(t));
```

$$so2 := v(t) = \frac{gm}{k} - \frac{gpw}{k} + \frac{\mathrm{e}^{\left(-\frac{kt}{m}\right)}(-mg+pgw)}{k}$$

代入条件 m=239.46,w=0.2058,g=9.8,p=1035.71,k=0.6，求出 $v(t)$的数值解：

```
>subs(m=239.46,w=0.2058,g=9.8,p=1035.71,k=0.6,v(t)=rhs(so2));
```

$$v(t) = 429.7444068 - 429.7444068\mathrm{e}^{(-.002505637685t)} \tag{6}$$

解(5)，令 $s(t)$=90，求出 t 值：

```
>solve(171510.9925*exp(-.2505637685e-2*t)+429.7444068*t-171510.9925=90,t);
```

$$12.99939724, -12.85977723$$

上面得到了 $s(t)$=90 的解 t =13;下面定义 $v(t)$为 t 的函数，以求出 $v(13)$：

```
> v(t):=t->429.7444068-429.7444068*exp(-.2505637685e-2*t);
```

$$v(t) = t \to 429.7444068 - 429.7444068\mathrm{e}^{(-.002505637685t)}$$

```
> v(t)(13);
```

$$13.7726610$$

求出了 $v(13)$=13.77m/s>12.2m/s，所以这种处理废料的方法不合理。因此，美国原子能委员会已经禁止用这种方法来处理核废料。

3. 模型的改进

在现有诸因素 m、w、g、p、k 中，我们可以适当地增大圆桶的体积，以达到增大浮力、减小速度的目的。

令 w=0.2088m^3。

```
> eq:=m*diff(s(t),t$2)=m*g-p*g*w-k*diff(s(t),t);
```

$$eq := m\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}s(t)\right) = mg - pgw - k\left(\frac{\partial}{\partial t}s(t)\right)$$

```
> ini:=s(0)=0,D(s)(0)=0;
```

$$ini := s(0) = 0, D(s)(0) = 0$$

```
> sol:=dsolve({eq,ini},s(t));
```

$$sol := s(t) = \frac{g(m-pw)m\mathrm{e}^{\left(-\frac{kt}{m}\right)}}{k^2} + \frac{tgm}{k} - \frac{tgpm}{k} - \frac{g(m-pw)m}{k^2}$$

```
>subs(m=239.46,w=0.2088,g=9.8,p=1035.71,k=0.6,s(t)=rhs(sol));
```

$$s(t) = 151256.7513\mathrm{e}^{(-.002505637685t)} + 378.9946167t - 151256.7513$$

```
> eq1:=m*diff(v(t),t)=m*g-p*g*w-k*v(t);
```

$$eq1 := m\left(\frac{\partial}{\partial t}v(t)\right) = mg - pgw - kv(t)$$

```
> so2:=dsolve({eq1,v(0)=0},v(t));
```

$$so2 := v(t) = \frac{(-mg+pgw)\mathrm{e}^{\left(-\frac{kt}{m}\right)}}{k} + \frac{gm}{k} - \frac{gpw}{k}$$

```
>subs(m=239.46,w=0.2088,g=9.8,p=1035.71,k=0.6,v(t)=rhs(so2));
```

$$v(t) = -378.9946167\mathrm{e}^{(-.002505637685t)} + 378.9946167$$

```
>solv(151256.7513*exp(-.2505637685e-2*t)+378.9946167*t-151256.7513=90,t);
```

$$solv(151256.7513\mathrm{e}^{(-.002505637685t)} + 378.9946167t - 151256.7513 = 90, t)$$

方程的根已经不能直接由命令求出来了，下面我们通过作出函数 $s(t)$的图像来大致估计 $s(t)$=90 的根，函数图像如图 5.6 所示。

```
>v(t):=t->-378.9946167*exp(-.2505637685e-2*t)+378.9946167;
```

$$v(t) := t \to -378.9946167\mathrm{e}^{(-.002505637685t)} + 378.9946167$$

```
>plot(151256.7513*exp(-.2505637685e-2*t)+378.9946167*t-151256.7513-90,t=0..20);
```

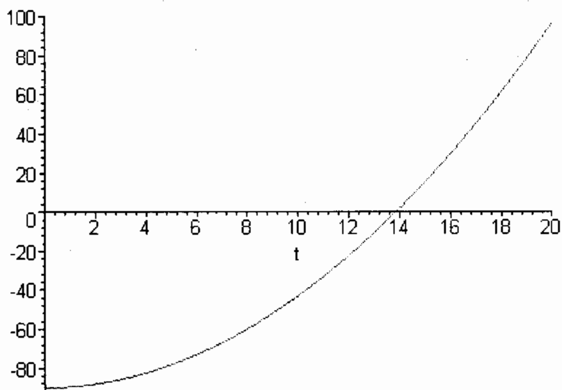


图 5.6　函数图

即 $s(t)$=90 的根为 t≈13.8

```
> v(t)(13.8);
```

$$12.8808215$$

即圆桶沉到海底时的速度 v=12.88>12.2，仍然不安全。

继续改变圆桶体积，令 w=0.2128m^3。

```
> eq:=m*diff(s(t),t$2)=m*g-p*g*w-k*diff(s(t),t);
```

$$eq := m\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}s(t)\right) = mg - pgw - k\left(\frac{\partial}{\partial t}s(t)\right)$$

```
> ini:=s(0)=0,D(s)(0)=0;
```

$$ini := s(0) = 0, D(s)(0) = 0$$

```
> sol:=dsolve({eq,ini},s(t));
```

$$sol := s(t) = \frac{g(m-pw)me^{\left(-\frac{kt}{m}\right)}}{k^2} + \frac{tgm}{k} - \frac{tgpw}{k} - \frac{g(m-pw)m}{k^2}$$

```
>subs(m=239.46,w=0.2128,g=9.8,p=1035.71,k=0.6,s(t)=rhs(sol));
```

$$s(t) = 124251.0963\mathrm{e}^{(-.002505637685t)} + 311.3282301t - 124251.0963$$

```
> eq1:=m*diff(v(t),t)=m*g-p*g*w-k*v(t);
```

$$eq1 := m\left(\frac{\partial}{\partial t}v(t)\right) = mg - pgw - kv(t)$$

```
> so2:=dsolve({eq1,v(0)=0},v(t));
```

$$so2 := v(t) = \frac{(-mg+pgw)\mathrm{e}^{\left(-\frac{kt}{m}\right)}}{k} + \frac{gm}{k} - \frac{gpw}{k}$$

```
>subs(m=239.46,w=0.2128,g=9.8,p=1035.71,k=0.6,v(t)=rhs(so2));
```

$$v(t) = -311.3282301\mathrm{e}^{(-.002505637685t)} + 311.3282301$$

```
>solv(124251.0963*exp(-.2505637685e-2*t)+311.3282301*t-124251.0963=90,t);
```

$$solv(124251.0963\mathrm{e}^{(-.002505637685t)} + 311.3282301t - 124251.0963 = 90, t$$

仍然没有求出根，还是通过作图像估计根，函数 $s(t)$图像如图 5.7 所示。

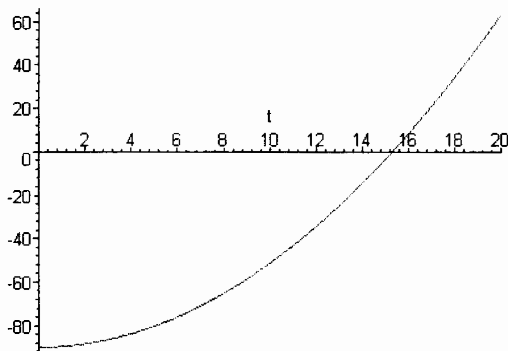


图 5.7 函数图

```
>v(t):=t->-311.3282301*exp(-.2505637685e-2*t)+311.3282301;
```

$$v(t) := t \to -311.3282301\mathrm{e}^{(-.002505637685t)} + 311.3282301$$

```
>plot(124251.0963*exp(-.2505637685e-2*t)+311.3282301*t-124251.0963-90,t=0..20);
> v(t)(15.2);
```

$$11.634969$$

即圆桶沉到海底时 v=11.634969 m/s<12.2 m/s。因此当圆桶体积 w=0.2128m^3，其他条件不变时，圆桶沉到海底而不至于破裂。

习 题 五

1. 求下列微分方程的通解：

   (1) $(1+x^2)y'=\arctan x$；

   (2) $(xy+x^3y)\mathrm{d}y=(1+y^2)\mathrm{d}x$；

   (3) $yy'-\mathrm{e}^{y^2+3x}=0$；

   (4) $\sin x\,\mathrm{d}y=2y\cos x\,\mathrm{d}x$；

   (5) $(x+1)y'+1=2\mathrm{e}^{-y}$；

   (6) $y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$。

2. 求下列一阶线性微分方程的通解：

   (1) $y'-2xy=\mathrm{e}^{x^2}\cos x$；

   (2) $xy'=y+\dfrac{x}{\ln x}$；

   (3) $xy'+y=\mathrm{e}^x$；

   (4) $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$；

   (5) $(x+y^3)\mathrm{d}y=y\mathrm{d}x$；

   (6) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$。

3. 求下列微分方程满足初始条件的特解：

   (1) $y-xy'=b(1-x^2y')$， $y|_{x=1}=1$；

   (2) $y\mathrm{d}x=(x-1)\mathrm{d}y$，$y|_{x=2}=1$；

   (3) $2y'-2xy=\mathrm{e}^{x^2}\cos x, y|_{x=0}=10$；

   (4) $(t+1)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=2\mathrm{e}^{-t}, x|_{t=1}=0$。

4. 求下列可降阶的二阶微分方程的通解：

   (1) $y''=\ln x$；

   (2) $y''+y'\tan x=\sin 2x$；

   (3) $y''(1+\mathrm{e}^x)+y'=0$；

(4) $(1-x^2)y''-xy''=0$。

5. 求下列二阶线性微分方程的通解：

(1) $y''-9y=0$；

(2) $y''-4y'=0$；

(3) $3y''-2y'-8y=0$；

(4) $4y''-8y'+5y=0$；

(5) $y''+6y'+13y=0$；

(6) $y''-2y'+y=0$。

6. 求下列二阶线性微分方程的通解：

(1) $2y''+5y'+4y=3x^2+1$；

(2) $y''+3y'=(3x^2+1)e^{-3x}$；

(3) $2y''+y'-y=4e^x$；

(4) $y''-2y'+5y=e^x\sin x$。

7. 求下列微分方程的特解：

(1) $y''-4y'+3y=0$,$y|_{x=}$， $y=6,y'|^{x=0}=10$；

(2) $y''+4y=0$, $y|_{x=0}=2$,， $y'|^{x=0}=6$。

第 6 章　向量代数与空间解析几何

处理空间几何的 Maple 命令都包含在软件包 geom3d 中，在使用 Maple 讨论空间几何问题之前，首先要用加载命令 with(geom3d)。Maple 软件能够识别诸如空间点(point)、空间线段(segment)、空间有向线段(directed segment)、空间直线(line)、平面(plane)、球(sphere)和多面体(polyhedra)等空间几何图形。

实验一　空间点、线、面的建立

问题：

我们生活的三维空间存在着大量的空间几何问题，解决这些问题与解决平面解析几何问题思想一样，建立空间点与三元有序实数组、空间图形与代数方程之间的对应关系，并运用代数的方法解决空间几何问题。

实验目的：

学会用 Maple 的有关命令建立空间点、空间线段、空间直线、空间平面，并能熟练运用。

实验准备：

熟悉空间点与三元有序实数组的对应；空间直线的确定方式有：过两点、过已知点且已知直线的方向向量、过已知点且垂直已知平面；平面的确定方式有：过不共线的三点、过已知点和平面的法向量、过两条相互平行或相交的直线。

Maple 中的有关命令：

point(A,a,b,c):	建立空间点 $A(a,b,c)$；
segment(seg,A,B):	定义线段 AB；
segment(seg,[A,B]):	定义线段 AB；
line(L,[A,B]):	定义过 A、B 两点的直线 L；
line(L,[A,v]):	定义过点 A，方向向量为 v 的直线 L；
line(L,[A,p]):	定义过 A 点垂直于平面 p 的直线 L；
line(L,[p1,p2]):	定义平面 $p1$ 与 $p2$ 相交的直线 L；
line(L,[a1+b1*t,a2+b2*t,a3+b3*t],t):	求直线 L 的参数方程；
plane(p,[A,B,C]):	定义过 A、B、C 三点的平面 p；
plane(p,[A,v]):	定义过 A 点，以向量 v 为法线的平面 p；
plane(p,[L1,L2]):	过平行或相交的直线 $L1$ 与 $L2$ 的平面 p；
plane(p,[A,L1,L2]):	过 A 点且平行于直线 $L1$ 与 $L2$ 的平面 p；

plane(p,eqn,n):	求平面 p 的方程 eqn，n 为方程中的参数；
coordinates(A);	显示点 A 的坐标；
Equation(L,'t');	求参数为"t"的直线 L 的参数方程；
projection(B,A,p);	求点 A 在平面 p 内的射影 B。

实验演示：

1. 空间点的建立

例 1　空间点 A 的坐标为(a,b,c)，建立空间点 A，并显示其坐标。

解：

```
> with(geom3d):
Warning, the name polar has been redefined
> point(A,a,b,c);
```

$$A$$

```
> coordinates(A);
```

$$[a,b,c]$$

2. 空间线段的建立

例 2　表示以 $A(0,0,0)$和 $B(1,1,1)$为端点的线段 AB。

解：

```
> point(A,0,0,0),point(B,1,1,1);
```

$$A,B$$

```
> segment(AB,[A,B]);
```

$$AB$$

3. 空间直线的建立

例 3　建立过空间点 $A(1，2，-3)$且垂直于平面 p：$3x-5y+4z=5$ 的直线方程 L；并求 A 点在平面内的射影点 B 的坐标。

解：

```
> point(A,1,2,-3):
> plane(p,3*x-5*y+4*z,[x,y,z]):
> line(L,[A,p]);
```

$$L$$

```
> Equation(L,'t');
```

$$[2+3t,5-5t,7+4t]$$

```
> projection(B,A,p);
```

$$B$$

> coordinates(B);

$$\left[\frac{73}{50},\frac{59}{10},\frac{157}{25}\right]$$

例 4　求过点 A(2，5，7)和 B(1，−4，2)的直线 L 的参数方程。

解：

> point(A,2,5,7),point(B,1,-4,2);

$$A, B$$

> line(l,[A,B]);

$$l$$

> Equation(l,'t');

$$[2-t, 5-9t, 7-5t]$$

例 5　求平面 $p1$:$4x+4y-5z=12$ 与平面 $p2$:$8x+12y-13z=32$ 的交线 L，并写出直线的参数方程。

解：

> L:='L':　plane(p1,4*x+4*y-5*z=12,[x,y,z]),plane(p2,8*x+12*y-13*z=32,[x,y,z]);

$$p1, p2$$

> line(L,[p1,p2]);

$$L$$

> Equation(L,'t');

$$[1+8t, 2+12t, 16t]$$

4. 空间平面的建立

例 6　求过点 A(2，−1，4)，B(−1，3，−2)和 C(0，2，3)的平面 p，并用方程表示。

解：

> point(A,2,-1,4),point(B,-1,3,-2),point(C,0,2,3);

$$A, B, C$$

> plane(P,[A,B,C]);

$$P$$

> Equation(P,[x,y,z]);

$$-12+32x+12y-4z=0$$

我们再用三维隐函数图像作图命令画出平面图形，如图 6.1 所示。

>implicitplot3d(32*x+12*y-4*z=12,x=-2..2,y=-4..4,z=-3..3,grid=[12,12,12]);

例 7　已知直线 $L1$ 是平面 $p1$:$x-y+4z=1$ 与平面 $p2$:$2x+y-3z=2$ 的交线，$L2$ 是过点 A(−3，−12，−2/3)且平行于向量(1,1/2,1/3)的直线,求过点 O(0,0,0),且平行于直线 $L1$ 和 $L2$ 的平面 p 的方程。

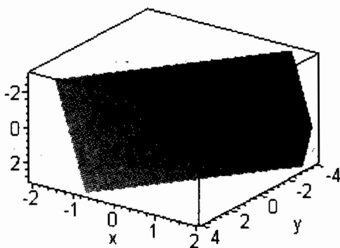


图 6.1 函数平面图形

解：

```
> P:='p':P1:='P1':P2:='P2':L1:='L1':L2:='L2':
> plane(P1,x-y+4*z=1,[x,y,z]):plane(P2,2*x+y-3*z=2,[x,y,z]):
> line(L1,[P1,P2]):
> line(L2,[point(A,-3,-12,-2/3),[1,1/2,1/3]]):
> point(O,0,0,0):
> plane(P,[O,L1,L2]):
> Equation(P,[x,y,z]);
```

$$\frac{13}{6}x+\frac{10}{3}y-\frac{23}{2}z=0$$

实验二 空间点线面的位置关系

问题：

我们在实验一中学会了建立三维空间的基本对象，除此之外，还应学会判断它们之间的位置关系以及会学求它们之间的距离和夹角，我们在这个实验中讨论这些问题。

实验目的：

学会运用 Maple 的有关命令判断空间点是否在给定的空间直线和空间平面上；判断两空间直线间的位置关系；判断直线与平面的位置关系；掌握两点间的距离、点到线的距离、点到面的距离、线到线的距离、线到面的距离、面到面的距离的计算方法以及两线间的夹角、两面间的夹角和线与面的夹角的计算方法。

实验准备：

Maple 中的有关命令，如表 6.1 所示。

表 6.1 Maple 中的有关命令

命 令	说 明
AreCoplanar(A,B,C,D):	判断空间点 A、B、C、D 是否共面
AreCoplanar(L1,L2):	判断空间直线 $L1$、$L2$ 是否共面

续表

命　令	说　明
IsOnObject	判断点是否在空间直线、平面或球体上
AreParallel	判断空间几何对象是否平行，几何对象包括直线与直线、平面与平面、直线与平面
Distance	计算空间几何对象间的距离，几何对象可以是点与点、直线与直线、平面与平面、点与直线、点与平面、直线与平面
ArePerpendicular	判断空间几何对象是否垂直，几何对象包括直线与直线、平面与平面、直线与平面
Parallel(w,u,v)	创建通过 u,平行 v 的几何对象 w
Detail(p)	显示几何对象 p 的详细情况
FindAngle	计算空间几何对象间的夹角，几何对象可以是直线与直线、平面与平面、直线与平面

实验演示：

1. 计算空间两点、点到平面、点到直线、直线到直线、直线到平面间的距离

例 1　求点 $A(a,b,c)$与点 $B(x,y,z)$之间的距离。

解：

```
> with(geom3d):
Warning, the name polar has been redefined
> point(A,a,b,c),point(B,x,y,z);
```

$$A, B$$

```
> distance(A,B);
```

$$\sqrt{x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2+z^2-2zc+c^2}$$

例 2　已知参数方程为$(2+t,3+t,4+2t)$,求原点到直线的距离。

解：

```
> line(L,[2+t,3+t,4+2*t],t);
```

$$L$$

```
> point(o,0,0,0);
```

$$o$$

```
> distance(o,L);
```

$$\frac{1}{6}\sqrt{5}\sqrt{6}$$

例 3　求点 $A(1，-1，2)$到平面 $2x+y-2z+1=0$ 的距离。

解：

```
> A:='A';
```

$$A := A$$

```
> point(A,1,-1,2);
```

$$A$$

```
> plane(P,2*x+y-2*z+1=0,[x,y,z]);
```

$$P$$

```
> distance(A,P);
```

$$\frac{2}{3}$$

例 4　已知直线 $L1$ 为平面 $x-y+2z-1=0$ 与平面 $2x+y+z+5=0$ 的交线，$L2$ 为过点 $A(1，-5，6)$，$B(3，-2，-7)$的直线，判断直线 $L1$ 与 $L2$ 是否共面，并求它们之间的距离。

解：

```
> A:='A';
```

$$A := A$$

```
> B:='B';
```

$$B := B$$

```
> plane(p1,x-y+2*z-1=0,[x,y,z]);
```

$$p1$$

```
> plane(p2,2*x+y+z+5=0,[x,y,z]);
```

$$p2$$

```
> line(L1,[p1,p2]);
```

$$L1$$

```
> point(A,1,-5,6),point(B,3,-2,-7);
```

$$A, B$$

```
> line(L2,[A,B]);
```

$$L2$$

```
> AreCoplanar(L1,L2);
```

$$false$$

```
> distance(L1,L2);
```

$$\frac{19}{201}\sqrt{402}$$

2. 计算平面与平面、直线与直线、直线与平面之间的夹角

例 5　求平面 $x-y+2z-1=0$ 与平面 $2x+y+z+5=0$ 的夹角。

解：

```
>> p1:='p1';
```

$$p1 := p1$$

```
> p2:='p2';
```

$$p2 := p2$$

```
> plane(p1,x-y+2*z-1=0,[x,y,z]);
```

$$p1$$

```
> plane(p2,2*x+y+z+5=0,[x,y,z]);
```

$$p2$$

```
> FindAngle(p1,p2);
```

$$\frac{1}{3}\pi$$

例 6　求平面 $2x-y+z=9$ 与平面 $x+y+2z=10$ 的夹角。

解：

```
> p1:='p1';
```

$$p1 := p1$$

```
> p2:='p2';
```

$$p2 := p2$$

```
> plane(p1,2*x-y+2*z=9,[x,y,z]);
```

$$p1$$

```
> plane(p2,x+y+2*z-10,[x,y,z]);
```

$$p2$$

```
> FindAngle(p1,p2);
```

$$\arccos\left(\frac{5}{18}\sqrt{6}\right)$$

例 7　已知 $L1$ 为平面 $x-y+2z-1=0$ 与平面 $2x+y+z+5=0$ 的交线，$L2$ 为过点 $A(1，-5，6)$，$B(3，-2，-7)$的直线，判断直线 $L1$ 与 $L2$ 是否共面，并求它们之间的夹角。(异面直线的夹角)

解：

```
> A:='A';B:='B';l1:=l1;l2:=l2;p1:=p1;p2:=p2;
```

$$A := A$$

$$B := B$$

$$l1 := l1$$

$$l2 := l2$$

$$p1 := p1$$

$$p2 := p2$$

```
> plane(p1,x-y+2*z-1=0,[x,y,z]);
```

$$p1$$

```
> plane(p2,2*x+y+z+5=0,[x,y,z]);
```

$$p2$$

```
> line(l1,[p1,p2]);
```

$$l1$$

```
> point(A,1,-5,6),point(B,3,-2,-7);
```

$$A, B$$

```
> line(l2,[A,B]);
```

$$l2$$

```
> FindAngle(l1,l2);
```

$$\arccos\left(\frac{2}{91}\sqrt{3}\sqrt{182}\right)$$

例 8　求直线 L：$(3t+2,t-2,-4t+3)$与平面 $3x-2y+7z=8$ 的夹角。

解：

```
> L:='L';P:='P';line(L,[3*t+2,t-2,-4*t+3],t);
```

$$L := L$$

$$P := P$$

$$L$$

```
> plane(P,3*x-2*y+7*z=8,[x,y,z]);
```

$$P$$

```
> FindAngle(L,P);
```

$$-\arcsin\left(\frac{21}{806}\sqrt{403}\right)$$

3. 点、线、面的位置关系

例 9　判断直线 $L1$：$(-2t-3,-7t-4,3t)$与平面 $p1$：$4x-2y-2z=3$ 是否垂直或平行，若平行则求出它们之间的距离；不平行也不垂直时，求出它们的夹角。

解：

```
> with(geom3d):
Warning, the name polar has been redefined
> line(l1,[-3-2*t,-4-7*t,3*t],t);
```

$$l1$$

```
> plane(p1,4*x-2*y-2*z=3,[x,y,z]);
```

$$p1$$

```
> ArePerpendicular(l1,p1);
```

$$false$$

```
> AreParallel(l1,p1);
```

$$true$$

```
> distance(l1,p1);
```

$$\frac{7}{12}\sqrt{6}$$

例 10　判断下列直线与平面是否垂直或平行，如果平行求它们之间的距离；如果不平行也不垂直时，求它们之间的夹角。

(1)　$L2$：$(3t,-2t,7t)$　　　$p2$：　$3x-2y-7z=8$

(2)　$L3$：$(3t+2,t-2,-4t+3)$　　$p3$：$x+y+z=3$

解：

```
> line(l2,[3*T,-2*t,7*t],t),line(l3,[3*t+2,t-2,-4*t+3],t);
```

$$l2, l3$$

```
> plane(p1,3*x-2*y+7*z=8,[x,y,z]),plane(p2,x+y+z=3,[x,y,z]);
```

$$p2, p3$$

```
> ArePerpendicular(l2,p1),ArePerpendicular(l3,p2);
```

$$false, false$$

```
> AreParallel(l2,p1),AreParallel(l3,p2);
```

$$false, true$$

```
> FindAngle(l2,p1);
```

$$\arcsin\left(\frac{1}{62}\sqrt{3286}\right)$$

```
>distance(l3,p3);
```

$$0$$

它们之间的距离为 0，说明直线 $L3$ 在平面 $p3$ 上。

4. 空间平行关系的建立

parallel(w,u,v)用于创建过 u，平行于 v 的几何对象 w。它的功能很强大，如果 u 是固定点，v 是一直线或平面，w 就是通过 u 与 v 平行的直线或平面；如果 u 与 v 都是直线，w 就是通过 u 与 v 平行的平面。

例 11　已知点 $A(0，0，0)$，$B(1，0，0)$，$C(0，1，0)$，$D(0，0，1)$和平面 p：$x+y+z=1$，求(1)过点 A 且平行于 p 的平面 $p1$；(2)过直线 AB 且平行于直线 CD 的平面 $P2$；(3)过点 D 且平行于直线 AB 的平面 L。

解：

```
> point(A,0,0,0),point(B,1,0,0),point(C,0,1,0),point(D,0,0,1);
```

$$A, B, C, D$$

```
> plane(p,x+y+z=1,[x,y,z]),line(AB,[A,B]),line(CD,[C,D]);
```

$$p, AB, CD$$

```
> parallel(p1,A,p);
```

$$p1$$

```
> detail(p1);
```

$$\begin{aligned} &name\ of\ the\ object: p1 \\ &form\ of\ the\ object: plane3d \\ &equation\ of\ the\ plane: x+y+z=0 \end{aligned}$$

```
> parallel(p2,AB,CD);
```

$$p2$$

```
> detail(p2);
```

$$\begin{aligned} &name\ of\ the\ object: p2 \\ &form\ of\ the\ object: plane3d \\ &equation\ of\ the\ plane: -y-z=0 \end{aligned}$$

```
> parallel(L,D,AB);
```

$$L$$

```
> detail(L);
```

$$\begin{aligned} &name\ of\ the\ object: L \\ &form\ of\ the\ object: plane3d \\ &equation\ of\ the\ plane: [_x=_t, _y=0, _z=1] \end{aligned}$$

实验三　向 量 代 数

问题：

向量是既有大小又有方向的量，也叫做矢量。它的引入形成了向量空间的概念。向量作为一个数学量可以进行某些代数运算，如计算它的模、两向量的夹角、向量的点积(数量积)和叉积(向量积)等。在物理学中我们常遇到两个或多个方向不同的量求和或者求乘积的问题，向量代数的引入为解决这些问题提供了有效的方法。

实验目的：

学会运用 Maple 软件计算向量的大小、两向量的夹角、两个向量的点积(数量积)和叉积(向量积)等。

实验准备：

熟练掌握向量的概念和向量模的概念，了解向量的夹角的概念和向量的点积(数量积)、叉积(向量积)的意义。

Maple 中的有关命令，如表 6.2 所示。

表 6.2　Maple 中的命令

命　令	说　明
with(LinearAlgebra):	加载向量代数的工具包
Vector[row](n,[a1,a2,…,an]):	定义 n 维行向量，其中 n 可省略
Vector[column](n,[a1,a2,…,an]):	定义 n 维列向量，其中 n 可省略
Vectdim(V):	计算向量 V 的维数
Norm(v,2):	计算向量 V 的模(大小)
VectorAngle(v1,v2):	计算向量 V1 与 V2 的夹角
DotProduct(v1,v2):	计算向量 V1 与 V2 的点积(数量积)
CrossProduct(v1,v2):	计算向量 V1 与 V2 的叉积(向量积)
VectorAdd:	向量求和
with(linagl):	加载向量代数的工具包，功能与 with(LinearAlgebra)相同，只是命令的开头字母不需要大写

实验演示：

例 1　设向量 $a=\{3,0,-3\},b=\{-2,1,4\}$，求 $a+b$ 及$|a+b|$。

解：

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=Vector[row]([3,0,-3]);
```

$$a := [3,0,-3]$$

```
> b:=Vector[row]([-2,1,4]);
```

$$b := [-2,1,4]$$

```
> VectorAdd(a,b);
```

$$[1,1,1]$$

```
> Norm(VectorAdd(a,b),2);
```

$$\sqrt{3}$$

例 2　已知 $a=\{-2,1,1\},b=\{1,-1,-2\}$，求 a 与 b 的数量积、向量积和夹角。

解：

```
>with(linagl):
> a:=vector[row]([-2,1,1]);
```

$$a := [-2,1,1]$$

```
> b:=vector[row]([1,-1,-2]);
```

$$b := [1,-1,-2]$$

```
> dotprod(a,b);
```

$$-5$$

```
> crossprod(a,b);
```

$$[-1,-3,1]$$

```
> angle(a,b);
```

$$\pi - \arccos\left(\frac{5}{6}\right)$$

实验四　等位基因的“距离”

问题：

向量是数学中重要的概念之一，我们在数学课上已经看到利用向量的有关知识，能有效地解决数学、物理学科中的很多实际问题。其实只要我们灵活运用向量的概念，也可以很方便地解决其他学科中的问题。在这个实验中，我们利用向量数量积的概念求解生物学中的等位基因的“距离”问题。

实验目的：

了解向量在生物科学实验中的实际应用。

实验准备：

回忆等位基因的概念：在一对同源染色体的同一位置上、控制着相对性状的基因，叫作等位基因；

熟悉向量数乘的概念及运算。

实验演示：

例：在控制高粱产量的染色体中，对各种品种的基因的频率进行了研究。如果我们把3种等位基因 x,y,z 区别开来，有人报告了如下的相对频率，如表6.3所示，问3个品种之间接近的程度如何？

表 6.3　相对频率数

基　因	高粱 1 号，f_{1i}	高粱 2 号，f_{2i}	高粱 3 号，f_{3i}
x	0.24	0.35	0.22
y	0.50	0.47	0.18
z	0.26	0.18	0.60
总计	1.00	1.00	1.00

解：求品种之间接近的程度,换句话说就是找一个表示基因之间“距离”的合适度量。

考虑利用向量代数的方法。我们用单位向量来表示一个品种。取每一品种相对频率的平方根，记为 $x_{ki}=\sqrt{f_{ki}}$ 。由于对这 3 个品种的每一种有 $\sum_{i=1}^{3} f_{ki}=1(k=1,2,3)$，所以我们得到 $\sum_{i=1}^{3} {x_{ki}}^2=1$，这就意味着下列 3 个向量：

$a_1=(x_{11},x_{12},x_{13})$，$a_2=(x_{21},x_{22},x_{23})$，$a_3=(x_{31},x_{32},x_{33})$的每一个向量都是单位向量，即$|a_k|=1$，$k=1,2,3$。

在三维空间中，这些向量的终点都落在半径为 1 的球面上。用两个向量之间的夹角θ来表示两个对应的群体间的“距离”是合理的：因为若设两个群体间在大圆上的弧长为l，则：$l=\theta$ 。又由于$|a_1|=|a_2|=1$，由数量积的定义得，$\cos\theta=a_1\cdot a_2$，代入数据可得：

$\cos\ \theta\ =0.9909$, $\theta\ =0.1348$。

由同样的方法计算每两个单位向量之间的夹角，可得表 6.4。由表 6.4 可以看出品种 1 与品种 2 之间的基因“距离”最小，而品种 2 与品种 3 之间的基因“距离”最大。

表 6.4　计算向量间的夹角

θ	品种 1	品种 2	品种 3
品种 1	0	0.1348	0.3904
品种 2	0.1348	0	0.4579
品种 3	0.3904	0.4579	0

向量的数量积的计算在实验三中已经解决，这里不再赘述。

习　题　六

1. 已知线段两端点的坐标，建立下列线段，并求出过下列两点的参数方程:
   (1) $A(1,-3,7)$　$B(-2,7,-8)$；
   (2) $C(2,0,-6)$　$D(9,6,-4)$；
   (3) $P(x,y,z)$　$Q(a,b,c)$；
   (4) $S(1,1,1)$　$R(-5,0,-5)$。
2. 求过点 $A(1,2,-1)$且垂直于平面 $2x+5y-4z=10$ 的直线方程，并求 A 点在平面内的射影 B 点的坐标。
3. 已知两平面的方程分别为 $x+4y=1$ 和 $3x-4z=7$，求两个平面的交线方程。
4. 已知某平面过三点 $A(0,4,-5)$、$B(-1,-2,2)$、$C(4,2,1)$，求该平面的方程。
5. 求过点$(-2,-3,0)$且法向量为 $n=\{1,-2,3\}$的平面方程。
6. 已知向量 $a=\{-3,6,7\}$，$b=\{5,13,-9\}$，求 $a+b$ 和 $a+b$ 的模。
7. 已知向量 $u=\{-2,-7,5\}$，$v=\{3,4,-2\}$，求向量 u 和 v 的向量积、数量积和夹角。
8. 求平面 $2x-y+z=9$ 与 $x+y+2z=10$ 的夹角。

9. 求点 $M(1, 2, 1)$到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离。
10. 已知三棱锥底面的 3 个顶点坐标为(3,5,3)、(-2,11,-5)和(1,-1,4)，顶点坐标为(0,6,4)，求该三棱锥的高。
11. 试确定下列各组中直线与平面的位置关系：
    (1) $(x+3)/(-2)=(y+4)/(-7)=z/3$ 和 $4x-2y-2z=3$；
    (2) $x/3=y/(-2)=z/7$ 和 $3x-2y+7z=8$；
    (3) $(x-2)/3=y+2=(z-3)/(-4)$和 $x+y+z=3$。
12. 求直线 $2(x-3)=y-4=z-5$ 与平面 $x+y+z=2$ 的夹角，并求交点到点 $P(3, 4, 5)$的距离。
13. 已知直线 L 是两平面 $x+2y-z-6=0$ 和 $2x-y+z+1=0$ 的交线，求它与平面 $x+y+z=9$ 的交点和夹角。
14. 判定下列两直线的位置关系。
    (1) $L1$：[-4+t，3-2t，2+3t]，$L2$：[-3+2t，1-4t，5+6t]；
    (2) $L1$：[-11+t，-1，-1]，$L2$：[-1+2t，1-t，-8+6t]。
15. 求异面直线[1+2T，2+3T，3+4T]和[2+3T，4+4T，5+5T] 的夹角和距离。
16. 用三维隐函数作图命令作出下列曲面的图形：
    (1) $x^2+y^2+z^2=9$；
    (2) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$；
    (3) $y^2-z=0$；
    (4) $z=2-x^2$。

第 7 章　多元函数的微积分

实验一　二元函数的微分

问题：

多元复合函数的高阶偏导数、极值在实际问题中有广泛的应用，但笔算方法繁琐且耗时、费力，所以应用 Mathcad 进行有关计算，对进一步提高多元函数微分的计算能力具有重要 的现实意义。

实验目的：

1. 本实验通过 Mathcad 工作页面上的工具栏执行菜单命令“View\Toolbars\Math”得到模板，点击该模板上微积分运算板的图标“$\int\frac{dy}{dx}$”，利用上面的按钮“$\lim\limits_{\blacksquare\to\blacksquare}\blacksquare$”，“$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$”，“$\frac{d^{\blacksquare}}{d\blacksquare^{\blacksquare}}\blacksquare$”学会求二元函数的极限；学会求二元函数、二元复合函数、二元 隐函数的一阶，高阶偏导数；学会作二元函数的图像。我们称由“View\Toolbars\Math”路径得到的模板为数学工具板。
2. 学会利用二元函数的驻点及二元函数的图像简化求极值的运算。

实验准备：

1. 理解二元函数的极限、偏导数、驻点、极值、条件极值、最值的概念及相应的计算方法；
2. 熟悉微积分运算板和符号运算工具板上各个按钮的功能；
3. 在第 4 章实验三的基础上，以本实验例 1 为例，继续体会 Mathcad 中键盘"="，数学工具板下的符号运算工具板(Symbolic)中的“→”，以及赋值符号“:=”的输入方法及功能；
4. 求一元方程符号解的两种方法：
   (1) 执行菜单命令“Symbolics\Variable\Solve”；
   (2) 单击符号运算板上的关键字按钮“solve”。

实验演示：

例 1　求二元函数的极限：$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\frac{x+y}{x^2+y^2}$。

解：

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b}\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)\to\frac{(a+b)}{(a^2+b^2)}$$

上式的操作：打开数学工具板上的微积分运算板(Calculus)，单击按钮“ $\lim\limits_{\blacksquare\to\blacksquare^{+}}\blacksquare$ ”；在极限号下面的两个占位符处输入 x 和 a；在极限号后面的占位符处输入 x+y；敲空格键让蓝色编辑线包住 x+y，x^2+y^2；再让蓝色编辑线包住输好了的分式；再敲空格键让蓝色编辑线包住前面输好的所有公式；单击 Symbolic 运算板下的“→”，这时就出现上式右边的运算结果了。

也就是：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=\dfrac{a+b}{a^2+b^2}$。

例 2　求二元函数的极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

解：

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\to2$$

也就是：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=2$。

例 3　讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限。

解：当(x,y)沿 x 轴趋向于(0,0)时，有：

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,0)=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot0}{x^2+0^2}=0;$$

当(x,y)沿直线 $y=kx(k\neq0)$ 趋向于(0,0)时，有：

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to kx}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}\neq0$$

因此 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在。这个函数在点(0,0)是什么样的状态呢？为什么 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在？在 Mathcad 中作出其函数图象像(图 7.1)，对上述极限状态就有一个比较清晰的认识了。

Mathcad 二元函数作图步骤：

① 定义函数：f(x,y):= $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　(1)

② 定义自变量取值范围：$x^2+y^2\neq0$　(2)

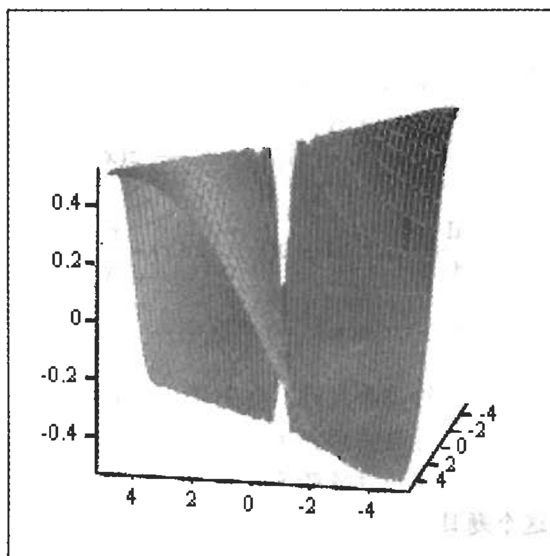
③ 按路径“View\Toolbars\Math\Graph”打开作图工具板，单击曲面图标，这时出现了一个三维作图框，就可以作三维函数图像了；

④ 在作图框左下角占位符处输入 f，在图形框外单击鼠标左键就出现曲面图形了，如图 7.1 所示。

例 4　求函数 $f(x,y)=x^2+3x^2.y+y$ 的偏导数。

解：

在 Mathcad 中求二元函数的偏导数仍用符号"$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$"。



f

图 7.1　函数曲面图形

先定义函数：

$$f(x,y) := x^2 + 3x^2y + y^4$$

通过运算板上的图标"$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$"和"→"作如下计算：

$$\frac{d}{dx}f(x,y) \to 2x + 6xy \qquad \frac{d}{dy}f(x,y) \to 3x^2 + 4y^3$$

我们分别得到：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 6xy \text{ 和 } \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4y^3$$

例 5　求 $z=e^{x^2 \cdot y}$ 的二阶偏导数。

解：

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{(x^2 \cdot y)} \to 2 \cdot y \cdot \exp(x^2 \cdot y) + 4 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot \exp(x^2 \cdot y)$$

$$\frac{d^2}{dy^2}e^{(x^2 \cdot y)} \to x^4 \cdot \exp(x^2 \cdot y)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}e^{(x^2 \cdot y)} \to 2 \cdot x \cdot \exp(x^2 \cdot y) + 2 \cdot x^3 \cdot y \cdot \exp(x^2 \cdot y)$$

例 6　设 $z=x^y\,(x>0,x\neq 1)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$z(x,y):=x^y$

$$\frac{d}{dx}z(x,y)\to x^y\cdot\frac{y}{x}\qquad\qquad \frac{d}{dy}z(x,y)\to x^y\cdot\ln(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}z(x,y)\to x^y\cdot\frac{y^2}{x^2}-x^y\cdot\frac{y}{x^2}\qquad\qquad \frac{d^2}{dx^2}z(x,y)\to x^y\cdot\ln(x)^2$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}z(x,y)\to x^y\cdot\frac{y}{x}\cdot\ln(x)+\frac{x^y}{x}$$

例 7　已知三元函数 $u(x,y,z)=z\cdot\text{anctan}\,(\frac{x}{y})$，证明：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

分析： 在求 u 的前两个二阶偏导数时，要先求一阶偏导数，再求二阶偏导数，u 对 z 的二阶偏导数可以直接去求。由于在 Mathcad 中直接求二阶偏导数，少数时候会出错，所以我们应注意验算，对前面的运算也应作类似的验算。请读者自己完成这个题目。

例 8　求二元复合函数 $z(x,y):=e^{x\cdot y}\cdot\sin\,(x+y)$ 的偏导数。

解：

$$z(x,y):=e^{x\cdot y}\cdot\sin(x+y)$$

$$\frac{d}{dx}z(x,y)\to y\cdot\exp(x\cdot y)\cdot\sin(x+y)+\exp(x\cdot y)\cdot\cos(x+y)$$

$$\frac{d}{dy}z(x,y)\to x\cdot\exp(x\cdot y)\cdot\sin(x+y)+\exp(x\cdot y)\cdot\cos(x+y)$$

例 9　求一元隐函数 $\sin\,(x+y)=x\cdot y$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$。

解：设函数 $F(x,y)$ 可微，$F_y(x,y)=0$，那么由方程 $F(x,y)=0$ 确定的一个可导函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$。

先在 Mathcad 中定义函数：

$F(x,y):=\sin(x+y)-x\cdot y$

$\frac{d}{dx}F(x,y)\to\cos(x+y)-y$

$\frac{d}{dy}F(x,y)\to\cos(x+y)-x$

由于以上两个偏导数连续，从而 $f(x,y)$ 可微，当 $\cos\,(x+y)-x\neq 0$ 时，得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\cos(x+y)-y}{\cos(x+y)-x}$$

关于二元隐函数有如下的偏导数法则：

设函数 $F(x,y,z)$可微，$F'_z(x,y,z) \neq 0$，那么由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数为：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

例 10　设 $-x^2+2y^2+3z^2=4$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：在 Mathcad 中定义隐函数：

$$F(x,y,z):=-x^2+2\cdot y^2+3\cdot z^2-4$$

$$\frac{d}{dx}F(x,y,z)\to -2\cdot x \qquad \frac{d}{dy}F(x,y,z)\to 4\cdot y \qquad \frac{d}{dz}F(x,y,z)\to 6\ (\text{即 } 6z)$$

也就是：$F'_x=-2x \qquad F'_y=4y \qquad F'_z=6z$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{-2x}{6z}=\frac{x}{3z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{4y}{6z}=-\frac{2y}{3z}$

例 11　求 $f(x,y)=x^3-y^3+3\cdot x^2+3\cdot y^2-9x$ 的极值。

解：先在 Mathcad 中定义函数

$$f(x,y):=x^3-y^3+3\cdot x^2+3\cdot y^2-9x$$

$$\frac{d}{dy}f(x,y)\to -3\cdot y^2+6\cdot y \qquad \frac{d}{dx}f(x,y)\to 3\cdot x^2+6\cdot x-9$$

求方程组 $\begin{cases}3x^2+6x-9=0\\ -3y^2+6y=0\end{cases}$ 的解。

$$(3\cdot x^2+6\cdot x-9=0)solve,x\to\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

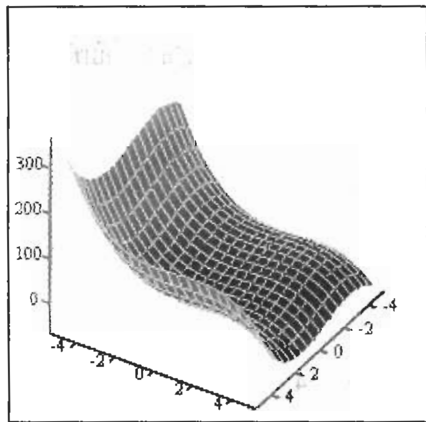
$$(-3\cdot y^2+6y=0)solve,y\to\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

得驻点：(1,0)、(1,2)、(−3,0)、(−3,2)。

我们知道这 4 个点是可能的极值点，但在数学上需按二元函数极值的充分条件进一步计算才能确定极值点，其计算量往往比较大。就算求出了极值点，对曲面的变化形势也是比较茫然的，而作出曲面图形不但可以迅速地判断出函数的极值点，求出函数的极值，而且对二元函数的性质有一个比较全面的了解。

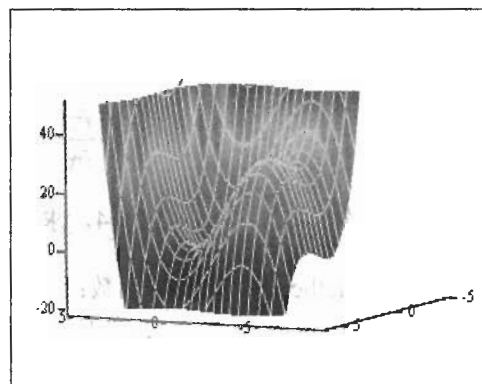
系统默认的图形显示格式下二元函数的极值情况不明显，如图 7.2 所示。编辑后的曲面图形如图 7.3 所示。Mathcad 与 Maple 的三维图形都可以通过按住鼠标左键移动鼠标进行任意旋转。通过对曲面各个侧面的观察，其峰顶、谷底一目了然，结合得到的 4 个驻点不难得到以下结论：

$f(x,y)$有极小值$f(1,0)=-5$，极大值$f(-3,2)=31$。



f

图 7.2 Mathcad默认的曲面



f

图 7.3 编辑后的曲面

也可以通过内部函数 Minimize(f,x,y),Maximize(f,x,y)求出多元函数的极小值点和极大值点。

x:=1　　y:=0　　Minimize(f,x,y)= $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 　　(1)

x:=1　　y:=2　　Minimize(f,x,y)= $\begin{pmatrix}1\\1.107\times10^{-7}\end{pmatrix}$ 　　(2)

x:=-3　　y:=0　　Minimize(f,x,y)= $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 　　(3)

x:=-3　　y:=2　　Minimize(f,x,y)= $\begin{pmatrix}1\\-2.606\times10^{-10}\end{pmatrix}$ 　　(4)

所以得极小值 ：$f(1,0)=-5$ 　　(5)

这时 Mathcad 计算式是以驻点为初始值进行迭代，以求出极值点，这里后 3 个点不是极小值点，给出的是极小值点的近似值。

再求极大值点：

x:=1　　y:=2　　Maximize(f,x,y)= $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ 　　(6)

x:=-3　　**y:=0**　　**Maximize (f,x,y)=** $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ 　　(7)

x:=-3　　y:=2　　Maximize (f,x,y)= $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ 　　(8)

结合图像，所求的极大值为 $f(-3,2)=31$ 　　(9)

我们也可以在 Mathcad 中找一些点通过计算，来验证已求出的极小值点和极大值点的正确性。另外以上(1)~(9)式中的等号均为键盘等号，都具有计算作用。

在 Mathcad 2001 中作曲面 $z=f(x,y)$的操作方法如下：

(1) 定义二元函数$f(x,y)$：$f(x,y):=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$；

(2) 执行菜单命令“Insert/Graph/Surface plot”，或点击图形工具版上的曲面图形按钮，创建一个三维图形区域；

(3) 在弹出的图形框中左下方的占位符处输入f；

(4) 在图形区域内左击鼠标，便出现了图形。

对上述图7.2进行了以下编辑：

(1) 编辑外观

确定曲面外观颜色：鼠标右击图形区域，在弹出的菜单上点击“Format”，弹出“3-D Plot Format”对话框，点击其中的外观标签卡“Appearance”，按路径“Fill Options/FillSurface/Colormap”，就可在其中确定彩色曲面；确定曲面网格颜色：按路径“LineOptions/Solid Color”打开调色板进行选择，以下图形网格均选择了黄色；

(2) 编辑坐标轴

确定x,y,z的取值范围：仍然在“3-D Plot Format”对话框中，点击“Axes/X-Axis/Axis Limits”不选Auto Grid，Minimum −8，Maximum 5，即x取值范围为[−8,5]，类似地确定y,z的取值范围；确定坐标轴颜色：点击“Axes/X-Axis/Axis Format”，再打开“Axis Color”左边的调色板进行选择，以下两图x轴均选为红色，确定坐标轴颜色是为了便于对图形的“数形”进行分析；确定坐标轴类型：按“3-D Plot Format/General/Axis Style/Perimeter”，即可选择坐标轴在图形周边。

例12 求函数$f(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4$的极小值。

解：定义函数

$$f(x,y,z):=2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y,z)\ \text{simplify}\rightarrow 4\cdot x+2\cdot y-2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y,z)\ \text{simplify}\rightarrow 2\cdot x+2\cdot y-2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(x,y,z)\ \text{simplify}\rightarrow 2\cdot z-4$$

求出驻点，以便较准确地给出Mathcad中要求极值的函数所需要的初始值，解如下方程组：

$$\begin{cases}4x+2y=2\\2x+2y=2\\2z=4\end{cases}$$

$$M:=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad v:=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$$

如果设 $B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，则下面解线性方程组：M*B = v

$$lsolve(M,v):=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \tag{1}$$

得如下驻点： $x:=0$　　$y:=1$　　$z:=2$

$$Maximize(f,x,y,z):=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \tag{2}$$

$$Minimize(f,x,y,z):=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \tag{3}$$

说明：

(1) 这里(1)、(2)、(3)式中的等号都是键盘等号，具有计算作用；

(2) 只有一个驻点的时候，极大值、极小值函数不能分辨出该驻点处函数取极大还是极小值，这时只需计算其他点的函数值，就清楚了极值状况。例如 $f(0,1,2)=-1$，$f(0,2,2)=0$，$f(1,3,1)=10$ 所以函数有极小值：$f(0,1,2)=-1$。

实验二　二元函数的积分

问题：

在科学技术中往往要计算与多元函数平面及空间区域有关的量，如立体的体积，曲面的面积，非均匀物体的质量、重心等等。这些量的计算，定积分一般难以解决，因此需要把定积分加以推广。当被积函数是二元或三元函数，积分范围是平面或空间区域时，这样的积分就是重积分；当积分范围是曲线弧或曲面块时，就是曲线积分与曲面积分。

实验目的：

学会在 Mathcad 中进行二重积分。

实验准备：

在掌握二重积分的基本概念及计算的基础上，理解在 Mathcad 中按钮“$\int\frac{dy}{dx}$”的使用方法：

(1) 按路径“View/Toolbars/Math”可以打开数学运算板“Math”，点击图标打开计算

板“Calculus”，单击两次其中的按钮“$\int_a^b$”，我们就得到二重积分的计算工具：

“$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare}\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare\, d\blacksquare\, d\blacksquare$”；

(2) 仍然在上述数学运算板“Math”中，点击其中学位帽图标，打开符号(Symbolic)运算板，其中的按钮“→”和“▪→”及“ simplify”都可以用来求积分的符号解，键盘等号键可以求积分的数值近似解。具体用法我们还要通过做练习来体会。

实验演示：

例 1　计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为曲线 $y=x^2$，$y^2=x$ 围成的区域。

解：$y(x):=x^2$，$g(x):=\sqrt{x}$

如图 7.4 所示。易见定义域为 D：$0\le x\le 1$，$x^2\le y\le\sqrt{x}$，在 Mathcad 中计算，得：

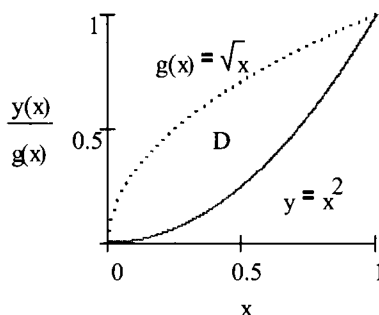


图 7.4　定义域

$\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\cdot y\mathrm{d}y\mathrm{d}x \to \frac{1}{12}$，所以得到：　$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{12}$。

例 2　计算二重积分 $\iint\limits_D(2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是直线 y=1,2x−y+3=0 和 x+y−3=0 围成的图形。

解：先定义函数：$y_1(x)$:=1,$y_2(x)$:2x+3,$y_3(x)$:=-x+3，再画出积分区域 D，如图 7.5 所示。

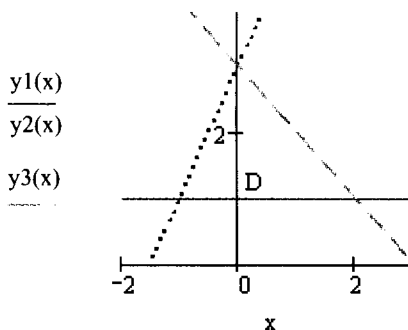


图 7.5　积分区域 D

$$y3(x) := -x + 3$$

所以积分区域 D 为：

$$\begin{cases} 1 \le y \le 3 \\ \frac{1}{2}(y-3) \le x \le 3-y \end{cases}$$

$$\int_1^3 \int_{\frac{1}{2}(y-3)}^{3-y} (2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \; simplify \rightarrow -3$$

即所求积分为：$\iint\limits_D (2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -3$。

例 3　计算 $I = \iint\limits_D \frac{\sin y}{y} \mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $x = y^2$ 所围成的区域。

解：根据被积函数的特点，把 D 看成 X-型区域，积分方可进行：
先作出 D 的图形：

$$y1(x) := x \qquad y2(x) := \sqrt{x}$$

由图 7.6，积分区域为：$D\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le y \end{cases}$

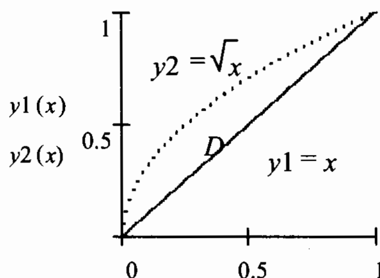


图 7.6　积分区域 D

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \; simplify \rightarrow -\sin(1) + 1$$

例 4　计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$。

解：区域 D 如图 7.7 所示，令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则 D 可表示为：

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

在 Mathcad 中进行计算：

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cdot r \, dr \, d\theta \; simplify \rightarrow \frac{2}{3}\pi \qquad \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\pi$$

$$y1(x) := \sqrt{1-x^2} \qquad y2(x) := -\sqrt{1-x^2}$$

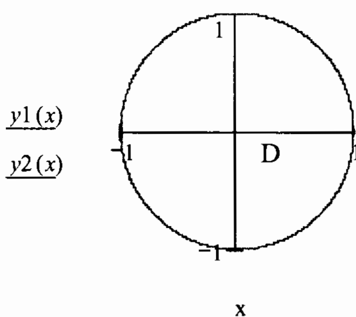


图 7.7　积分区域 D

例 5　计算：$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$

解：设 $I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$　　　　$I_2 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

把以上两个积分化为极坐标形式：

I_1 积分区域为 A，A：$\begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \le r \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sec\ \theta \end{cases}$

在 Mathcad 中计算 I_1：

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sec(\theta)} r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \to \frac{1}{12} + \frac{1}{24} 2^{\frac{1}{2}} \ln\left(2^{\frac{1}{2}} + 1\right)$$

I_2 的积分区域化为 D，则 D：$\begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sec\ \theta \le r \le 1 \end{cases}$，如图 7.8 所示。

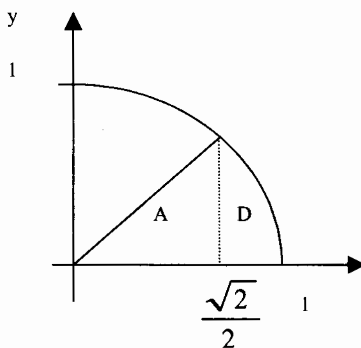


图 7.8

在 Mathcad 中计算 I_2：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}\sec\theta}^{1} r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \to \frac{1}{12}\pi-\frac{1}{12}-\frac{1}{24}2^{\frac{1}{2}}\ln(2^{\frac{1}{2}}+1),$$

所以 $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{4}}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}\sec\theta}^{1} r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \to \frac{\pi}{12}$,

即 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_0^{x}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12}$。

实验三　沙滩座椅外形的设计

问题：

非线性二元函数的图形给人以曲面的形象，二元函数的极值定量地给出了曲面的峰顶和谷底，如何把这些数学知识应用于我们身边的生活实际，是我们始终应该关注的问题。

实验目的：

了解通过一元函数极值的特性构建所需要的求二元函数极值的方法，进一步学习一元函数、二元函数极值的应用，初步了解数学建模的方法。

实验准备：

熟悉二元函数驻点、极值、条件极值的概念；熟练掌握利用两种软件作一元函数、二元函数图像的方法。

实验演示：

1. 问题的提出与建立模型

本题是一个二元函数问题，我们利用座椅外形的几个截面图形构造其一元函数,再由此组成一个二元函数，确定座椅的外形。

构造二元函数

我们熟悉如下三次函数的图像，在 Mathcad 中作出其图形：

先定义函数：$f(x):=3x^2-x^3$　　(1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\to 6x-3x^2 \quad 6x-3x^2 solve, x\to\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

得驻点 x=0 和 x=2，因此(2,4) 为图 7.9 的极大值点。

我们用抛物线 $z=3y^2$ 描述上述曲线，考虑 y 的取值范围 $-4\le y\le 4$，在 Mathcad 中作图如图 7.10 所示。

先定义函数：$z(y):=3y^2$　　(2)

这样可以设座椅外形的方程为：$z=by^2+c$

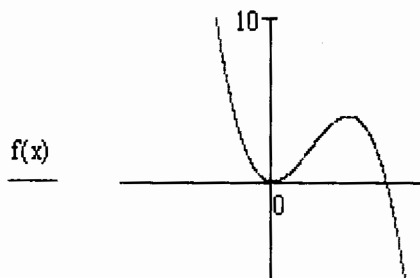


图 7.9

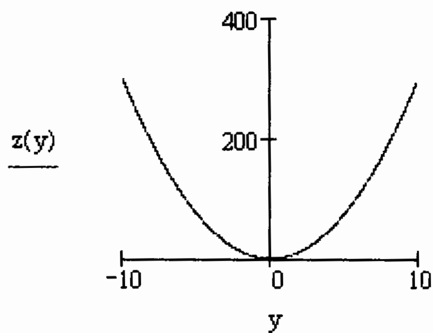


图 7.10

为了与(2)的曲率一致，取 b=3，由(1)中极大值点(2,4)，可得 c=4，于是曲线可以写为：

$$z = 3y^2 + 4$$

实际上 z=c 是抛物线顶点的高度，而这个高度用(1)式代入则可得出我们需要的函数：

$$z(x,y) = 3y^2 + 3x^2 - x^3$$

这就是座椅外形的二元函数，为了使椅子更舒适，我们取边界为 $(x^2 + y^2) \le 16$。

用它来作为曲面的定义域，是因为一般计算软件默认曲面的定义域为矩形，做出的图形出现尖顶，取圆域为定义域，就去掉了尖顶。

求极值和最值

$f(x,y) = 3y^2 + 3x^2 - x^3$　　定义函数；

$\frac{d}{dx} f(x,y) \to 6x - 3x^2$　　求对 x 的一阶偏导数；

$\frac{d}{dx} f(x,y) solve, x \to \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　　求 $f_x' = 0$ 的根，$x_1 = 0, x_2 = 2$；

$\frac{d}{dy} f(x,y) \to 6y$　　求对 y 的一阶偏导数；

$\frac{d}{dy} f(x,y) solve, y \to 0$　　求 $f_y' = 0$ 的根，y=0，求出驻点 $M(0,0)$，$N(2,0)$.

$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y) \to 6-6x$ $A:=6-6x$，在(0,0)点 A=6；

$\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}f(x,y)\right) \to 0$ $B:=0$；

$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y) \to 6$ $C:=6$。

因此 $AC-B^2=36>0$ 且 $A>0$，所以 f 在 $M(0,0)$处取极小值，极小值点为 $O(0,0,0)$；在 $N(2,0)$处有 $A=-6$ ，$B=0$，$C=6$， $AC-B^2<0$，所以 f 在 $N(2,0)$处不取极值，$N(2,0,4)$为鞍点(是驻点，但不是极值点)。为了使椅子更舒适，我们取边界为： $x^2+y^2=16$，代入 $f(x,y)$得：

$$z=3x^2+3(16-x^2)-x^3=48-x^3, -4 \le x \le 4$$

显然，$x=-4$ 时，z 取最大值，所以在边界点上，$z=112$；在驻点 $O(0,0)$上，$z=0$；在驻点 $N(2,0)$上，$z=4$。综上，函数在 $S(-4,0)$处取最大值，$z_{最大}=112$，最高点为 $H(-4,0,112)$处函数在 $T(4,0)$处取最小值，$z_{最小}=-16$，最低点为 $L(4，0，-16)$。

2. 作出 f(x,y)图像

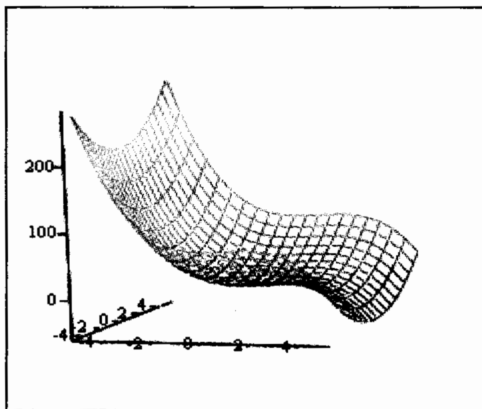
在 Mathcad 中做出函数图像：

$f(x,y):=3y^2+3x^2-x^3$ 定义函数；

$x:=-4..4 \quad y(x):=\sqrt{16-x^2}..\sqrt{16-x^2}$ 确定定义域；

通过路径“Insert /Graph/Surface Plot”作出图像，如图 7.11 所示。我们看到 Mathcad 并未如我们期望的在圆域中作图。在这里，定义域表示成圆域比较麻烦。

换一个工具，我们在 Maple 软件中作图如图 7.12、图 7.13。



f

图 7.11

作图语句为：

$> plot3d(x \wedge 2+y \wedge 2-x \wedge 3, x=-4..y=-sqrt(16-x \wedge 2)..sqrt(16-x \wedge 2))$;

从作图语句中我们看到在 Maple 中二元函数的圆形定义域很容易实现，因此需要熟练使用一两种软件，必要的时候便于优势互补，以有效地帮助我们解决各种问题。

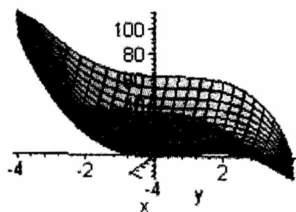


图 7.12



图 7.13

3. 结果分析

曲面是由曲面截线构造而成的,本题通过对曲线形状的分析构造了曲面。本题内容丰富，有取极小值的点，也有在边界上取最大值、最小值的情况。本图形有条件极值、有条件最大值\最小值，有局部极值,有驻点极小,也有鞍点,是比较典型的极值最值问题。

习　题　七

1. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}$。

2. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3y+y^3x$；

(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$；

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；

(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(5) $z=\ln\mathrm{tg}\dfrac{x}{y}$；

(6) $z=(1+xy)^{z}$；

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$；

(8) $u=\text{arctg}(x-y)^{z}$。

3. 求下列函数的全微分：

(1) $z=xy+\dfrac{x}{y}$；

(2) $z=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$；

(3) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(4) $u=x^{yz}$。

4. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1,y=2$ 时的全微分。

5. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\ \Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分。

6. 求 $z=\mathrm{e}^{xy}$ 当 $x=1,y=1,\ \Delta x=0.15,\ \Delta y=0$ 时的全微分。

7. 设有一无盖圆柱形容器，容器的壁与底的厚度均为 0.1 厘米，内高为 20 厘米，内半径为 4 厘米,求容器外壳体积的近似值。

8. 设 $\sin y+\mathrm{e}^{x}-xy^{x}=0$,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

9. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

10. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

11. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$。

12. 求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值。

13. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$的极值。

14. 求 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值。

15. 在平面 xoy 上求一点，使它到 $x=0,y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 的距离平方和为最小。

16. 求内接于半径为 a 的球的长方体的最大体积。

17. 画出积分区域 D，并求值：

(1) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ，其中 D：$x^2+y^2\le 2x$；

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 D：$x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$；

(3) $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=2$，$y=x$ 及双曲线 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 所围成的区域；

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由直线 $y=x, y=x+a, y=a$ 和 $y=3a$ ($a>0$)所围成的区域。

第8章 无穷级数

实验一 常数项级数

问题

前面第2、3章中我们已经叙述了一元微积分中最重要的概念和基本计算：函数的极限、微分和积分。为了更好地掌握所研究的对象，往往需要一些专门工具，无穷级数的理论正是为了这种需要而形成的。无穷级数是表示函数、研究函数性质以及进行数值计算的重要工具。本章将利用 Mathcad 首先讨论常数项级数的敛散性及其判定法；其次要讨论幂级数收敛域的确定；最后将讨论如何把一个函数展开成幂级数的形式以及这种展开在近似计算上的应用。

实验目的

学会以 Mathcad 为计算工具，利用无穷级数收敛的必要条件，几何级数和 p 级数的敛散性，正项级数的比较判别法、比值判别法，交错级数的莱布尼兹判别法，无穷级数绝对收敛与条件收敛的概念，判断相应级数的敛散性。

实验准备

熟悉无穷级数收敛、发散及和的概念，无穷级数收敛的必要条件，无穷级数的基本性质；熟知几何级数和 p 级数的敛散性，正项级数的比较审敛法、比值审敛法，交错级数的莱布尼茨审敛法，交错级数的截断误差，无穷级数的条件收敛与绝对收敛的概念，绝对收敛与收敛的关系。

本实验中常用的 Mathcad 计算工具：

(1) 输入表达式：在最上一行工具栏的视图菜单中按路径“View\Toolbars\Calculus”可以找到求和按钮“$\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$”和求极限按钮“$\lim_{\blacksquare\to\blacksquare}\blacksquare$”。必须注意的是在使用之上按钮之前，必须使编辑线为蓝色状态，执行菜单命令“Insert/Math Region”可以使文本插入数学区域，也就是出现蓝色编辑线。

(2) 计算：输入好级数或极限表达式后，使蓝色编辑线停在右下方字符的右侧，然后敲空格键，直到蓝色编辑线包住整个表达式，再在菜单“Symbolic”中单击按钮“→”或按钮“float”，其中前一个按钮进行符号运算，后一个按钮进行数值运算。

实验演示：

1. 常数项级数的概念和性质

例 1 讨论等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$ 的敛散性(a≠0)。

解：$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \left| \begin{array}{l} simplify, q \\ assume, q = RealRange(-1,1) \end{array} \right. \to -a\frac{q}{(q-1)}$ ；

注意： 上式中的等号是 Mathcad 中的粗等号"**=**"，它只表示相等关系，没有计算功能。

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ax^i \quad assume, |x| > 1 \to a * x\wedge(n+1)/(x-1) - a * x/(x-1)(assume, |x| > 1)$ 。

也就是 $|x|<1$ 时级数收敛，$|x| \geqslant 1$ 时级数发散。

例 2 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性。

解：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \to 1$ 所以该级数收敛

或者按级数收敛定义，计算如下：$s(n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \to \frac{-1}{(n+1)} + 1$ 即 $s(n) := \frac{-1}{(n+1)} + 1$

所以 $\lim_{n\to\infty} s(n) \to 1$，所以该级数收敛。

说明： 在上文或下文中出现的符号"→"，均为 Mathcad 中的"符号计算"的按钮，它具有计算功能。

例 3 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n-1})^2$ ；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ 。

解：对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若一般项的极限不为零，即 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数发散。

(1) 由于 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^2 \to \frac{1}{4}$，也就是 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^2 \neq 0$，由级数收敛的必要条件知，该级数发散。

(2) 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} \to 1$，也就是 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} \neq 0$，

由级数收敛的必要条件知，该级数发散。

2. 比较判别法

例 4　判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{n})$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$。

解：

(1) 直接在 Mathcad 中计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 不能确定敛散性。

又因为 $\ln(n+1)<n$，所以 $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n}$，由正项级数的比较判别法知道：

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 也发散。

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin(\frac{1}{i})\to\infty$，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{n})$ 发散。虽然 $\sin(\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$,但由

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，不能确定 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{n})$ 是否发散。然而，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\to 1$ ，所以由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

发散知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{n})$ 也发散。

(3) 先在 Mathcad 中计算：$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}\to\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{[n(n^2+1)]^{\frac{1}{2}}}$，敛散情况未定。

用比较判别法：因为 $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{n^{3/2}}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 是收敛的，故原级数收敛。这里我们应注意到即使对收敛级数而言，直接用 Mathcad 命令求和函数也不一定能求到。这又一次告诉我们要重视数学理论的学习。

(4) 先在 Mathcad 中计算：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}\to 6$ 或者 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ float,8 →6，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 收敛。

用比较判别法的极限形式，因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2^n}}{\frac{1}{n^2}}\to 0$,又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 也收敛。

3. 比值判别法

例 5 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{\ln(n)}}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan(\frac{\pi}{2^{n+1}})$。

解：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}\to\frac{33}{8}$，所以级数收敛。

用比值判别法：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}}\to 1/3$，1/3<1,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$收敛。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}\to\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$，这种情况不能断定级数的敛散性，但在 Mathcad 中算得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n n!}{n^n}\to\infty$，由级数收敛的必要条件知原级数发散。这其实是用了 Mathcad 的计算功能解决问题的，应用比值判别法如下：

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}\to 3\cdot\exp(-1)$，而$\frac{3}{e}>1$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$发散。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{\ln(n)}}\to\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{\ln(n)}}$，敛散情况不定。利用级数收敛的必要条件得：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^{\ln(n)}}\to\infty$，因此原级数发散。用比值判别法得：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{3^{\ln(n+1)}}}{\frac{2^n}{3^{\ln(n)}}}\to 2>1$,所以由比值判别法知级数发散。

(4) 利用级数收敛的必要条件得：$\lim\limits_{n\to\infty}n\tan(\frac{\pi}{2^{n+1}})\to 0$，不能判断敛散性。

用比值判别法得：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan(\frac{\pi}{2^{n+2}})}{n\tan(\frac{\pi}{2^{n+1}})}\to\frac{1}{2}$，而$\frac{1}{2}<1$，所以级数收敛。

比值判别法的最大优点在于无需找其他级数来比较，但当$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$时，此法无

效，需另行判定。

判断正项级数敛散性的一般步骤是：先看是否有 $a_n \to 0$，若没有，则级数发散；

若 $a_n \to 0$，则用比值判别法或根值判别法来判别敛散性。如果仍然无法判定，则用比较判别法或定义来求 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$。

4. 交错级数的敛散性

例 6　判断下列级数的敛散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(\frac{1}{n+1})$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{3n+1}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n-\ln(n)}$。

解：

(1) 因为 $a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\to 0$，由莱布尼兹审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛。

(2) 因为 $a_n=\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{\ln(n+2)}=a_{n+1}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\to 0$，由莱布尼兹审敛法，级数 $\sum\limits_{n-1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(\frac{1}{n+1})$ 收敛。

(3) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}\to\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}\neq 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{3n+1}\neq 0$，由级数收敛的必要条件知级数发散。

(4) 设 $a_n=\frac{1}{n-\ln(n)}$，设 $f(x)=x-\ln(x)$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$，当 $x\geqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，因而 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 单调增加，所以 $(n+1)-\ln(n+1)>n-\ln(n)$，所以 $a_n=\frac{1}{n-\ln(n)}>\frac{1}{(n+1)-\ln(n+1)}=a_{n+1}$，又因为在 Mathcad 中算得：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln(n)}\to 0$，由莱布尼兹审敛法知级数收敛。

以上我们从经典数学理论出发，说明了某些级数的敛散性。下面我们具体观察 a_n 和 s_n 在 Mathcad 中的数值计算结果，以体会定理的含义。

定义 a_n 和 s_m，$a(n):=\ (-1)^n\cdot\frac{1}{n-\ln(n)}$

$n:=1..10$ ，　　　　　　　　　　　　$n:=100..110$，

a(n) =

-1
0.76519711
-0.52593166
0.38259855
-0.29493635
0.237629
-0.19785956
0.16890299
-0.14699883
0.12991375

a(n) =

0.01048275
-0.01037507
0.01026957
-0.01016619
0.01006486
-9.96551537 0 -3
9.86810674 0 -3
-9.77257544 0 -3
9.67886787 0 -3
-9.58693243 0 -3
9.49671949 0 -3

$a_n \to 0$ 的趋势已经依稀可见了。

$$S(m) := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n-\ln(n)}$$

m:=100,200..1000　　　　n:=1000,2000,..,10000

s(m) =

-0.53745255
-0.54010526
-0.54097064
-0.54139933
-0.54165517
-0.54182513
-0.54194622
-0.54203686
-0.54210726
-0.54216351

s(m) =

-0.54216351
-0.54241584
-0.54249965
-0.54254149
-0.54256657
-0.54258329
-0.54259522
-0.54260417
-0.54261112
-0.54261669

我们已经看到：当 n→∞时，部分和数列越来越趋向于一个确定的常数。

若定义 $S(n,m) := \sum_{n=1}^{m} (-1)^n \frac{1}{n-\ln(n)}$，则在 Mathcad 中可算得：

$s(5000,100000)=-0.542661732019584$,

$s(45000,100000)=-0.542661732019584$。

从这两个式子中可以看到 n 充分大时，部分和数列趋向于零，也就说明级数是收敛的。

我们再看看用按钮“$\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$”求级数的和与用函数符号“s(m,n)”求和的区别：

$$\sum_{n=1}^{20000} (-1)^n \cdot \frac{1}{n-\ln(n)} float,8 \to -0.54264311 \quad (1) \qquad s(1,20000)=-0.54264172 \quad (2)$$

(1)式的计算时间为 13 分 20 秒，(2)式的计算时间仅为 1 秒，精确度均为 8 位有效数字，它们的结果是不一样的，这提醒我们应慎重选择计算方法。

例 7　判别下列级数是否收敛；如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{3^{n-1}}$；

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\dfrac{1}{\ln(n)})$。

解：

(1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n+1}{3^n}}{\dfrac{n}{3^{n-1}}}\to\dfrac{1}{3}<1$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{n}{3^{n-1}}\right|$ 收敛，故原级数收敛，且是绝对收敛。

(2) 因为 $a_n=\sin(n\pi+\dfrac{1}{\ln(n)})=(-1)^{n-1}\sin(\dfrac{1}{\ln(n)})$，所以 $|a_n|=\sin(\dfrac{1}{\ln(n)})$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(\dfrac{1}{\ln(n)})}{\dfrac{1}{\ln(n)}}\to 1$，由 $\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{n}$，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n)}$ 发散，因此 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin(\dfrac{1}{\ln(n)})$ 也发散，所以原级数不是绝对收敛。而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\dfrac{1}{\ln(n)})=0$，且 $|a_n|=\sin(\dfrac{1}{\ln(n)})>|a_{n+1}|=\sin(\dfrac{1}{\ln(n+1)})$，所以交错级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin(\dfrac{1}{\ln(n)})$ 收敛，故原级数条件收敛。

实验二　幂　级　数

问题：

我们已经知道，幂级数的和是幂级数收敛域上的一个函数，虽然这个函数有可能是一个很复杂的函数，而且也有可能不是一个我们比较熟悉的初等函数，但在收敛域内，我们总可以用部分和(一个多项式)来近似地表示这个和函数，并且只要项数 n 足够大，这种近似表示的精确性就可以达到所要求的程度。由于多项式便于计算，也便于求它的导数和积分，因而通过幂级数 $\sum a_n x^n$ 或 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 来研究它所表达的和函数的性质是一个有效的方法。

实验目的：

学会在 Mathcad 中利用有关命令求幂级数的和函数、收敛半径和收敛区间；熟记常用初等函数的幂级数泰勒展开式和马克劳林展开式；通过对函数的恒等变形或利用幂级数的代数性质和分析性质以及常用初等函数的幂级数展开式求出其他一些函数的幂级数展开式；理解幂级数收敛于和函数的几何意义。

实验准备：

理解幂级数、和函数、收敛域、收敛半径的概念；掌握幂级数收敛域的求法；熟记 e^x, $\sin x,\cos x,\ln(1+x)$ 和$(1+x)^a$ 的马克劳林展开式。

本实验中常用的 Mathcad 计算工具：

(1) 展开幂级数：在最上一行工具栏的视图菜单中按路径“View\Toolbars\Symbolic”打开符号计算板，单击按钮“▮ series,▮,▮ →”，最左边的占位符输入要展成幂级数的函数，中间的一个占位符输入收敛域中心 x_0，最右边一个占位符输入要展成的级数的项数；

(2) 计算：输入级数或极限表达式后，使蓝色编辑线停在右下方字符的右侧，然后敲空格键，直到蓝色编辑线包住整个表达式，再在菜单“Symbolic”中单击按钮“→”或按钮“float”，前一个按钮是进行符号运算的，后一个按钮是进行数值运算的。

实验演示：

例 1　求下列幂级数的收敛区间：

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots$；

(2) $1-x+\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{x^3}{3^3}+\cdots$；

(3) $\dfrac{x}{1\cdot 3}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3^2}+\dfrac{x^4}{4\cdot 3^4}+\cdots$；

(4) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 4}+\dfrac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$。

解：

(1) $u_n=nx^n$，$a(n):=n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a(n+1)}{a(n)}\right|\to 1$，收敛半径 R=1。当 x=−1 或 1 时，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$，易见，当 $n\to\infty$ 时,这两个级数的一般项都不趋于零，此时两个级数发散，所以收敛区间为(−1,1)。

(2) $u_n=(-1)^n\dfrac{x^n}{n^2}$，$a(n):=(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n^2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a(n+1)}{a(n)}\right|\to 1$，收敛半径 R=1。当 x=1 时，原级数为 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}\to 1-\dfrac{1}{12}\pi^2$，该交错级数收敛；当 x=−1 时，级数为 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\to 1+\dfrac{1}{6}\pi^2$，级数收敛，因而收敛区间为[−1，1]。

(3) $u_n=\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}$，$a(n):=\dfrac{1}{n\cdot 3^n}$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a(n+1)}{a(n)}\right|\to\dfrac{1}{3}$，　所以 R=3。

当 x=3 时，原级数为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\to\infty$，此级数发散；当 x=−3 时，原级数为

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\to -\ln(2)$，此时级数收敛，所以级数的收敛区间为[−3，3]。

(4) $u_n=\frac{x^n}{2^n\cdot n!}$ ，$a(n):=\frac{1}{2^n n!}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a(n+1)}{a(n)}\to 0$，所以收敛半径 $R=\infty$，即收敛区间为(−∞，+∞)。

(5) 该级数缺少偶数项，依比值审敛法求收敛半径 R：

因为 $u(x,n):=(-1)^n\ \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u(x,n+1)}{u(x,n)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1}}{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}\to \mathrm{x}^2$，

$\left|x^2\right|<1$ 即 $|x|<1$ 时，级数绝对收敛，$|x|>1$ 时级数发散，所以 $R=1$。

当 $x=1$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\to -1+\frac{\pi}{4}$，级数收敛；

当 $x=-1$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\to 1-\frac{\pi}{4}$ ，级数收敛，所以收敛区间为[−1，1]。

例 2　利用逐项求导或逐项积分，求下列级数在收敛区间内的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$。

解：

(1) 由于 $\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ ，而 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\to\frac{-x}{x-1}$，

即 $\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{-x}{x-1}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\int_0^w\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)'=\left(\frac{-x}{x-1}\right)'$。

在 Mathcad 中求导数：$\frac{d}{dx}\frac{-x}{x-1}$ simplify $\to\frac{1}{(x-1)^2}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(x-1)^2}$ $(-1<x<1)$。

以上我们应用了逐项积分，再逐项求导数的方法求出了级数的和函数。就本题的特殊性而言，也可以在 Mathcad 中通过命令“Symbolic\→”直接求出级数的和函数。本题的和函数为：

$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\to\frac{1}{(x-1)^2}$ $(|x|<1)$。

(2) 如果我们直接利用 Mathcad 求和函数，操作结果如下：

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\to\frac{1}{5}x^5\,\mathrm{hypergeom}\left[\left(1,\frac{5}{4}\right),\left(\frac{9}{4}\right),x^4\right]$。用不常用的超几何函数表示，影响了结果的直观性，如果逐项求导再积分会改善上述结果。

因为$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\to\frac{-x^4}{(x^4-1)}$，

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\int_0^x\frac{t^4}{1-t^4}dt\to -x-\frac{1}{4}\ln(x-1)+\frac{1}{4}\ln(x+1)+\frac{1}{2}a\tan(x)+\frac{1}{4}i\pi$，

其中$\frac{1}{4}i\pi$ 是计算的模型误差。把$\frac{t^4}{1-t^4}$写成部分分式的形式，再积分：

$\frac{t^4}{1-t^4}$ convert,parfrac,t→ $-1-\frac{1}{4(-1+t)}+\frac{1}{4(1+t)}+\frac{1}{2(t^2+1)}$，

$\int_0^x\left[-1-\frac{1}{4(-1+t)}+\frac{1}{4(1+t)}+\frac{1}{2(t^2+1)}\right]dt$ convert,parfrac,t →

$-x-\frac{1}{4}\ln(x-1)+\frac{1}{4}\ln(1+x)+\frac{1}{2}a\tan(x)$ （$-1<x<1$）。

本题的计算机求解过程使我们再次看到：数学理论的应用可以帮助我们更好地利用软件进行计算。

例 3 求下列函数的马克劳林级数展开式。

(1) $\sin^2(x)$;

(2) $\ln(1+x)$;

(3) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$。

解：

(1) 传统解法一：因为 $\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$，

所以 $\sin^2(x)=\frac{1}{2}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}\right]$，$x\in(-\infty,+\infty)$;

传统解法二：设 $y=\sin^2(x)$ 所以 $y'=2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x)$,

而 $\sin(2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $x\in(-\infty,+\infty)$,

所以 $y=\int_0^w\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{2(2n)!}$;

Mathcad 解法：

$(\sin(x))^2$ series,x=0, 9 → $x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6-\frac{1}{315}x^8$ $x\in(-\infty,+\infty)$。

(2) $\ln(1+x)$ series,x=0,10 → $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8+\frac{1}{9}x^9$,

由不完全归纳猜想：$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$。

在 Mathcad 中完全归纳得：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\to\ln(1+x)$，所以要求的级数展开式为：

ln(1+x) = $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$,显然 $-1<x<1$ 时级数收敛；

又因为当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\to\ln(2)$；当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(-1)^n\to-\infty$，

即 $x=1$ 时级数收敛；$x=-1$ 时，级数发散，所以级数的收敛域为：$[-1,1]$。

(3) 传统解法：由于 $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$，

所以，$\frac{\sin(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$；

在 Mathcad 中求解如下：$\frac{\sin(x)}{x}$ series,x=0,8 $\to$ $1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{5040}x^6$，

也就是：$x\neq 0$ 时，$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$；

当 $x=0$ 时，$f(x)=1$。

例 4

(1) 将函数 $\frac{1}{5-x}$ 展成 $x-2$ 的幂级数；

(2) 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成$(x+4)$的幂级数。

解：

(1) $\frac{1}{5-x}$ series, x=2,5 $\to$ $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}x+\frac{1}{27}(-2+x)^2+\frac{1}{81}(-2+x)^3+\frac{1}{243}(-2+x)^4$

即：$\frac{1}{5-x}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x-2}{3}+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+\left(\frac{x-2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{x-2}{3}\right)^n+\cdots\right]$，由 $-1<\frac{x-2}{3}<1$，得收敛区向[-1,5]。

(2) $\frac{1}{x^2+3x+2}$ series, x=-4,5 $\to\frac{13}{18}+\frac{5}{36}x+\frac{19}{216}(x+4)^2+\frac{65}{1296}(x+4)^3+\frac{211}{7776}(x+4)^4$

即：$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{6}+\frac{5}{6^2}(x+4)+\frac{19}{6^3}(x+4)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$，

而级数 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n$ 和级数 $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n$ 的收敛区间分别为：$-1<\frac{x+4}{2}<1$ 和 $-1<\frac{x+4}{3}<1$，即收敛区间为 $-6<x<-2$。

例 5 作出函数 $f(x)=\sin x$ 的 $n(n=2,n=4)$阶马克劳林公式中多项式收敛于 $\sin x$ 的图像，并求误差小于 0.001 的 x 的范围。

解：通过 Mathcad 我们已经会求 $\sin x$ 的 n 阶马克劳林公式(过程略)：

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}$，$(-\infty<x<+\infty$，$n=2m)$；

其中，$R_{2m}(x)=\frac{\sin[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}]}{(2m+1)!}x^{2m+1},(0<\theta<1)$ ；

设 $p_n(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$，多项式 $p_n(x)$的次数 $n-1$ 越大，余项 $|R_{2m}|$ 越小，多项式 $p_n(x)$近似代替函数 $f(x)$就越精确。

我们作出当 $n=2$，$n=4$ 时这一多项式近似代替 $\sin x$ 的图象。先在 Mathcad 中定义函数：

$f(x):=\sin(x)$　　$p1(x):=x$　　$p2(x):=x-\frac{x^3}{3!}$　　$p3(x):=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$

$p4(x):=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$，再通过路径“Math/”单击一元函数图象按钮，打开作图框就可以作图。

在 Mathcad 工作页面上，不同的曲线以不同的颜色表示，我们可以清楚地观察出图 8.1 到图 8.4 的变化，看到随着多项式次数 n 的增大，$pi(x)$ $(i=1,2,3,4)$逼近 $f(x)$的误差越来越小。

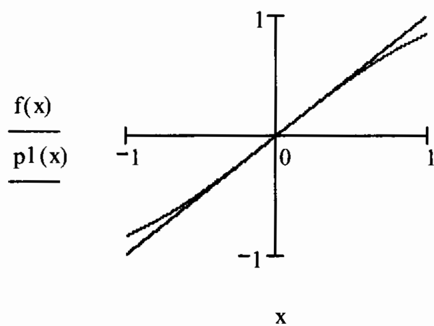


图 8.1　n=2 时 p1(x)逼近 f(x)的情形

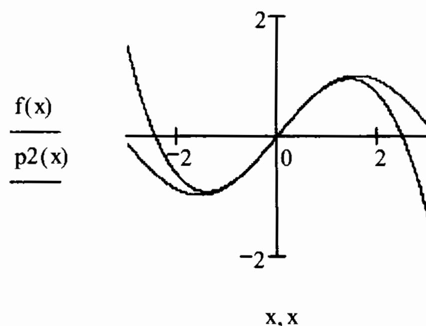


图 8.2　n=4 时 p2(x)逼近 f(x)的情形

我们再作出 $n=6$,$n=8$ 时的图像，以全面观察多项式收敛于和函数的情形：

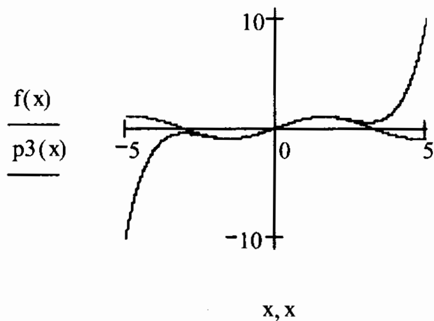


图 8.3　n=6 时 p3(x)逼近 f(x)的情形

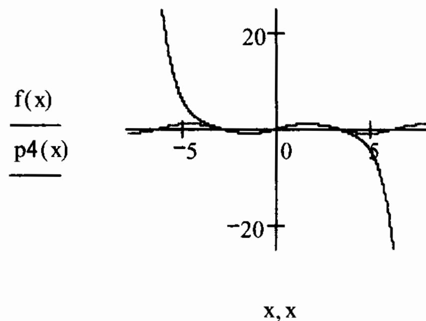


图 8.4　n=8 时 p4(x)逼近 f(x)的情形

若取 $n=2$，即 $m=1$，得近似公式：$\sin x\approx x$。当要求误差不超过 0.001 时，只需

$$|R_2(x)|=\left|\frac{\sin(\theta x+\frac{3\pi}{2})}{3!}x^3\right|\leqslant\frac{|x|^3}{6}\leqslant 0.001，(0<\theta<1)，所以 |x|<0.1817。$$

若取 n=4，即 m=2，则可得 sin$x$ 的 3 次近似多项式：$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}$。同样，要求误差不超过 0.001 时，只需

$$\left|\frac{x^5}{120}\right|<0.001 \quad 或 \quad |x|<0.6544$$

容易看到如果用更高次数的多项式来代替函数 sin x 时，就达到更高的精确度，并且在 x 的更大的范围内表达 sin x，所以这个表达的收敛域是($-\infty<x<+\infty$)。读者可以继续提高多项式的次数去作一下图象，以体会幂级数收敛于和函数的情形。

实验三　雪花的周长与面积

问题：

在我们生活的周围,除了房屋建筑、公路桥梁这些规则的几何形体之外，还有千姿百态的花草树木、山川河流等极不规则的几何形体，面对这些美不胜收的自然景色，科学家和艺术家苦苦追寻的是：如何描述大自然的表象并努力揭示其内在规律？由于研究自然界几何形态的需要，最近几十年发展了一门新兴的几何学科——分形几何学。分形几何把自然界看作具有无限嵌套层次的精细结构，而且它在不同尺度下保持某种相似的属性。于是在简单的迭代中就可以得到描述复杂的自然形态的有效方法。

实验目的：

通过对雪花周长与面积的计算，初步认识分形几何研究对象的几何属性。

实验准备：

学会通过 Mathcad 的数学计算板进行有关级数的计算。

实验演示：

本演示中我们介绍曾经带给我们无限遐想的雪花。我们研究当雪花花瓣不断增加时，雪花的面积及周长的变化情况。

我们先给定一个正三角形，然后在每条边上对称地产生一个边长为原边长的 1/3 的小正三角形，如图 8.5 所示。如此类推，在每条凸边上都做类似的操作，就得到了一系列类似雪花的图形。它们的面积有限而周长无限，也就是随着雪花花瓣的不断增加，雪花的面积始终是有界的而其周长却是无界的。下面我们将从 3 个方面来进行说明：

1. 寻找规律

设等边三角形的边长为 1，初始状态如图 8.5 所示。

则多边形的边数、边长、周长、面积：

$$n(0)=3; \quad a(0)=1; \quad c(0):=3\cdot1; \quad s(03):=\frac{\sqrt{3}}{4}。$$

第 1 次分叉，如图 8.6 所示。

$$n(1)=3\cdot4=12; \quad a(1)=\frac{1}{3}; \quad c(1):=3\cdot4\cdot\frac{1}{3}; \quad s(1):=s0+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}。$$

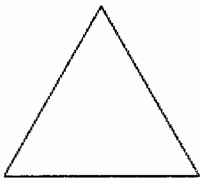


图 8.5 初始状态

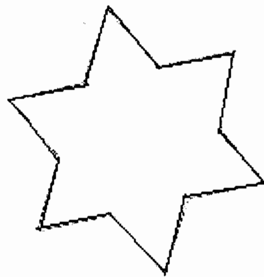


图 8.6 第 1 次分叉结果

第 2 次分叉，如图 8.7 所示。

$$n(2)=(3\cdot4)\cdot4=3\cdot4^2; \ a(2)=\frac{1}{3^2}; \ c(2):=3\cdot4^2\cdot\frac{1}{3^2}=3\left(\frac{4}{3}\right)^2; \quad s(2):=s1+3\cdot4\cdot\left(\frac{1}{3^2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}。$$

第 3 次分叉，如图 8.8 所示。

$$n(3)=3\cdot4^2\cdot4=3\cdot4^3; \ a(3)=\frac{1}{3^3}; \ c(3):=3\cdot4^3\ \frac{1}{3^3}=3\left(\frac{4}{3}\right)^3; \quad s(3):=s2+3\cdot4^2\left(\frac{1}{3^3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}。$$

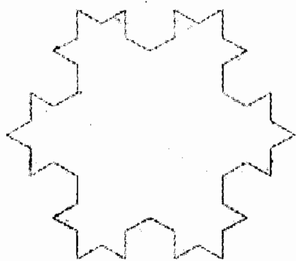


图 8.7 第 2 次分岔结果

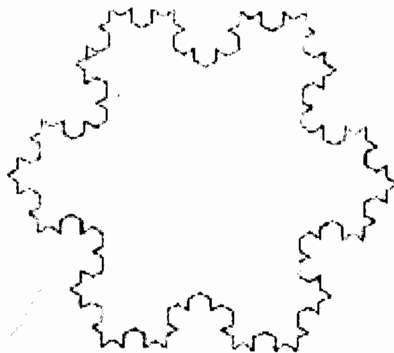


图 8.8 第 3 次分岔结果

第 k 次分叉，如图 8.9 所示。

$$nk=3\cdot4^k; \quad ak=\frac{1}{3^k}; \quad c(k):=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n; \quad s(n):=s(k-1)+3\cdot4^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{3^k}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}。$$

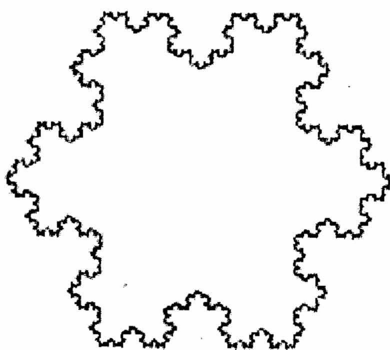


图 8.9　第 k 次分叉

2. 结果分析

(1) 计算周长数列 $c(n)$和面积数列 $s(n)$的值，观察变化趋势：

下面我们在 Mathcad 中计算雪花周长数列和面积数列的值，其操作步骤如下：

① 定义数列表达式，给出项数的取值范围：

$$n:=1..20\,,\qquad c(n):=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n};\qquad k:=1..20\,,\ s(k):=\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{n=1}^{k}3\cdot4^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{3^{n}}\right)^{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}。$$

② 计算数列的值：只需在 $c(n)$、$s(k)$后面直接键入键盘等号键即可。

c(n) =
4
5.3333333
7.1111111
9.4814815
12.6419753
16.8559671
22.4746228
29.9661637
39.9548849
53.2731799
71.0309065
94.7078754
126.2771672
168.3695562
224.4927416
299.3236555

s(k) =
0.5773503
0.6415003
0.6700114
0.682683
0.6883149
0.6908179
0.6919304
0.6924248
0.6926445
0.6927422
0.6927856
0.6928049
0.6928135
0.6928173
0.692819
0.6928197

我们看到周长随着分叉次数 n 的增加有无限增大的趋势,而雪花的面积则趋向于确定的常数。

(2) 作出 $c(c)$、$s(n)$的图像如图 8.10、图 8.11 所示。

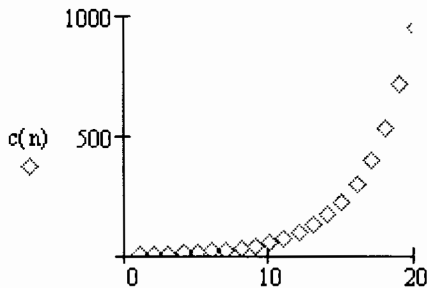


图 8.10 c(n)图像

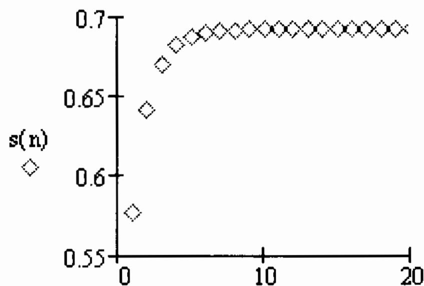


图 8.11 s(n)图像

(3) 求极限得出结论：

当分叉次数趋向于无穷时，周长设为 c，面积设为 s，则

$$c=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n\to\infty$$

$$s=\frac{\sqrt{3}}{4}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+3\cdot4\cdot\left(\frac{1}{3^2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+3\cdot4^2\cdot\left(\frac{1}{3^3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\cdots+3\cdot4^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{3^n}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot4^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{3^n}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\to\frac{2}{5}\sqrt{3}=0.6928203$$

通过以上分析，我们知道：当分叉次数趋向于无穷时，周长趋向于无穷而面积是有限的。有限与无限，有界与无界这一既矛盾又统一的哲理完美地蕴涵于一片片晶莹剔透的雪花里。我们赖以生存的大自然里，除了有诸如房屋桥梁、飞机、轮船等规则几何形体外，还有更多的如花草树木、山川河流等极不规则的几何形体。科学家逐渐认识到另一个几何世界的存在，后来科学家把描述自然界几何形态的学科叫分形几何。

分形几何的图形有一个共同的构造方式，即最终图形 F 都是按照一定的规则 R 通过对初始图形不断修改得到的，其中最具代表性的图形是雪花(Koch)曲线。

习 题 八

1. 根据级数收敛与发散的定义判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(2) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$；

(3) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$。

2. 试计算下列级数的前 8 个项以及前 n 项($n=1,2,\cdots,8$)的部分和，画出部分和数列的图像，并利用图像猜测级数的敛散性，如果级数收敛的话，求出级数的和。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{3^n}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n-1)}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{2}{5})^{n-1}$。

3. 先用比较审敛法判别下列级数的收敛性，再在 Mathcad 中验证其收敛性。

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$；

(2) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+4)}+\cdots$；

(3) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ $(a>0)$。

4. 利用比值审敛法判别下列级数的收敛性，再在 Mathcad 中验证其收敛性；

(1) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$　；

(3) $\sum_{n-1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$　；

(5) $\frac{(1!)^2}{2\cdot 1^2}+\frac{(2!)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(3!)^2}{2\cdot 3^2}+\cdots$。

5. 判别下列级数是否收敛，如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$　；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n}{3^{n-1}}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$。

6. 求下列幂级数的收敛区间：

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots$　；

(2) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}$　；

(3) $\dfrac{x}{1\cdot 3}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3^2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 3^3}+\dfrac{x^4}{4\cdot 3^4}+\cdots$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$。

7. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;

(2) $\ln(a+x)$ (a>0);

(3) $(1+x)\ln(1+x)$。

8. 将下列函数展开成$(x-1)$的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $\sqrt{x^3}$;

(2) $\lg x$。

9. 利用级数展开计算$\sqrt[5]{200}$的近似值，使误差不超过 0.0001。

10. 试利用级数展开来计算 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的精确到 0.001 的近似值。

第 9 章　线性代数与线性规划

实验一　矩阵运算

问题：

矩阵是线性代数的最重要概念之一，它在数学、自然科学、工程技术、社会科学，特别是经济学中有着广泛的应用，因此掌握矩阵之一基本数学工具对于从事科学技术和经济管理工作都是必不可少的。

实验目的：

理解数组、矩阵、行列式的基本概念，认识它们在 MATLAB 中的表示方法，学会在 MATLAB 中进行行列式、数组的常用基本计算及矩阵的“加、减、乘、除、逆、秩”的运算。

实验准备：

1. MATLAB 简介

MATLAB 是由美国 MathWorks 公司于 1967 年推出的 Matrix Laboratory(矩阵实验室)软件包的缩写，它所有的计算都是以矩阵为基本单元进行的，不难理解它最大的特色是具有强大的矩阵运算功能，因此 MATLAB 是研究线性代数、线性规划的有力工具。本实验介绍如何运用 MATLAB 来进行矩阵的基本运算。

2. MATLAB 的安装和启动

MATLAB 的安装与第一章实验一中 Maple 的安装过程一样，启动后命令窗口为 MATLAB Command Window，5.3 版本提示符为“>”，6.0 以上版本提示符为“》”，在提示符后输入命令就可以操作了。

3. MATLAB 中标点符号的意义

(1) MATLAB 的每条命令后，若为逗号或无标点符号，则显示命令的结果；若命令后为分号，则不显示结果。
(2) “%”后面所有文字都为注释说明。
(3) “/…”表示续行。

4. 数组的表示

x=[n1,n2, …,nk] 或 x=[n1 n2 …nk]	创建包含指定元素的行向量；
x=first:last	创建从 first 开始，步长为 1，到 last 结束的行向量；

x=first:increment:last　　创建从 first 开始，步长为增加量“increment”，到 last 结束的行向量；

x=linspace(first,last,n)　　创建从 first 开始，到 last 结束，有 n 个元素的行向量。

例如：

(1) x=[1,2,3,4,5,6,7,8]

```
x =
     1     2     3     4     5     6     7     8
```

(2) x=6:16

```
x =
     6     7     8     9    10    11    12    13    14    15    16
```

(3) x=3:3:21

```
x =
     3     6     9    12    15    18    21
```

(4) x=linspace(0,1,11)　　%第一个数是 0,最后一个数是 1,变量个数(数据点数)为 11 的数组

```
x =
  Columns 1 through 7
         0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000
  Columns 8 through 11
    0.7000    0.8000    0.9000    1.0000
```

5. 矩阵的表示

以左方括号开始，以右方括号结束，矩阵同行之间以空格或逗号分隔，行与行之间以分号或回车符分隔。

例　>> a=[21 34 20;5 78 20;21 14 17;34 31 38]　　%创建一个 4 行 3 列的矩阵

```
a =
    21    34    20
     5    78    20
    21    14    17
    34    31    38
```

6. MATLAB 提供了几个建立特殊矩阵的命令如下：

>>a=[]　　%产生一个空矩阵，当对一项操作无结果时，返回空矩阵，空矩
%阵的大小为零；

>> b=zeros(m,n)　　%产生一个 m 行、n 列的零矩阵；

>> c=ones(m,n)　　%产生一个 m 行、n 列的元素全为 1 的矩阵；

>> d=eye(m,n)　　%产生一个 m 行、n 列的单位矩阵。

例　>> eye(3,5)

```
ans =
      1    0    0    0    0
      0    1    0    0    0
      0    0    1    0    0
```

实验演示：

1. 数组及数组的运算

例 1　数与数组的计算：

```
A=[-1 0 1 2 3]
A=
     -1    0    1    2    3
2*A+2 =
      0    2    4    6    8
```

“.*”点乘符号表示对数组 c 和 d 施加元素对元素的运算，不带点的乘号“*”表示矩阵的乘法。

数组除法同样需要点除“./”或“.\”,而“/”与“\”表示矩阵的除法；与乘法和除法一样，“^”为矩阵求幂所保留,而数组乘幂用“.^”表示。

看下面的例子，请仔细体会数组与矩阵的运算法则的不同之处。

例 2　数组与数组的运算。

已知

a=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]

b=[1 1 1; 2 2 2 ; 3 3 3]

求(1) a+b　　(2) a–b;

(3) 2*a;　　(4)a.*b 和 a*b

(5) a.b/和 a.\b。

解：

(1)(2)(3)的运算与矩阵的运算结果一致，请读者自己完成。

```
(4)  a.*b
ans =
      1     2     3
      8    10    12
     21    24    27
a*b              %矩阵乘法
ans =
     14    14    14
     32    32    32
     50    50    50
(5)  a.\b
ans =
```

```
    1.0000    0.5000    0.3333
    0.5000    0.4000    0.3333
    0.4286    0.3750    0.3333
a./b
abs=1.0000    2.0000    3.0000
    2.0000    2.5000    3.0000
    2.3333    2.6667    3.0000
```

例 3　数组计算的应用：计算函数值 $y=xe^{-x}$　$0\leqslant x\leqslant 1$。

解：用 MATLAB 计算如下：

```
x=[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1.0];
x =
  Columns 1 through 7
         0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000
  Columns 8 through 11
    0.7000    0.8000    0.9000    1.0000
y=x.*exp(-x)
y =
  Columns 1 through 7
         0    0.0905    0.1637    0.2222    0.2681    0.3033    0.3293
  Columns 8 through 11
0.3476    0.3595    0.3659    0.3679
```

2. 矩阵的加减运算

进行运算的两个矩阵的大小必须完全相同，使用的运算符号是“+”与“–”。

例 4　已知：$a=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\\2&6\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}2&4\\1&8\\9&0\end{bmatrix}$，求 $a+b$ 和 $a-b$。

解：用 MATLAB 计算如下：

```
>> a=[1 2;3 5;2 6];
>> b=[2 4;1 8;9 0];
>> c=a+b
c =
       3     6
       4    13
      11     6
  >> c=a–b
c =
    –1    –2
     2    –3
```

```
    -7     6
```

3. 乘法运算

设 A 矩阵为一个 $i \times j$ 大小的矩阵，则要求与之相乘的 B 矩阵必须是一个 $j \times k$ 大小的矩阵。矩阵的乘法运算使用的运算符号是“*”。

例 5　已知 $a=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\\ 2 & 6\end{bmatrix}$，　$b=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 8 & 9 & 0\end{bmatrix}$，　求 $a*b$。

解：用 MATLAB 计算如下：

```
>> a=[1 2;3 5;2 6];
>> b=[2 4 1;8 9 0];
>> c=a*b
c =
        18     22      1
        46     57      3
        52     62      2
```

例 6　已知 $a=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -1\\ 4 & 10 & -1\end{bmatrix}$，　$b=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 10\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$，求 $a.*b$。

解：用 MATLAB 计算如下：

```
>> a=[1 2 0;2 5 -1;4 10 -1];
>> b=[1 2 4;2 5 10;0 -1 -1];
>> c=a.*b
c =
     1      4      0
     4     25    -10
     0    -10      1
```

例 7　$a=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$，求 a^2 和 $a.$^2。

解：a=[1 2 3; 4 5 6 ; 7 8 9]

```
    a^2
ans =
    30     36     42
    66     81     96
   102    126    150
a.^2
ans =
     1      4      9
```

```
    16    25    36
    49    64    81
```

a.^2 是矩阵中每个元素平方，而 a^2 是按照矩阵乘法法则进行计算的。

4. 除法运算

在线性方程组的求解中，正斜杠“/”和反斜杠“\”可以用来表示矩阵方程的解：$AX=B$ 的解用 $X=A\backslash B$ 表示，而方程 $XA=B$ 的解用 $X=B/A$ 表示，“\”称为矩阵的左除，“/”称为矩阵的右除。正反斜杠的使用详见本章实验二。

5. 转置运算

矩阵的转置只需用符号“|”来表示。

例 8　已知 $a=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -1\\ 4 & 10 & -1\end{bmatrix}$，求 a 的转置矩阵。

解：用 MATLAB 计算如下：

```
>> a=[1 2 0;2 5 -1;4 10 -1];
>> c=a'
c =
     1     2     4
     2     5    10
     0    -1    -1
```

6. 逆运算

矩阵的逆运算只需用函数“inv”来实现，这大大简化了计算过程。

例 9　已知 $a=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -1\\ 4 & 10 & -1\end{bmatrix}$，求 a 的逆矩阵。

解：用 MATLAB 计算如下：

```
>> a=[1 2 0;2 5 -1;4 10 -1];
>> b=inv(a)
b =
     5     2    -2
    -2    -1     1
     0    -2     1
```

注意： 不是所有的矩阵都有逆矩阵，只有当矩阵的行列式不为零，即 $|A|\neq 0$ 时，该矩阵的逆矩阵才存在。

7. 行列式运算

求矩阵的行列式大小，可用函数“det”来实现。矩阵的行列式值可用来判定矩阵是否可逆：当 $|A|\neq 0$ 时，矩阵 A 可逆。

例 10　已知 $a=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 5 & -1\\4 & 10 & -1\end{bmatrix}$，求 a 的行列式值 $|a|$。

解：用 MATLAB 计算如下：

```
>> a=[1 2 0;2 5 -1;4 10 -1];
>> b=det(a)
b =
     1
```

实验二　线性方程组的解

问题：

本实验以矩阵为工具来讨论线性方程组解的求法，以及在 MATLAB 环境下如何求解线性方程组。

实验目的：

理解齐次线性方程组 $A_{m\times n}*X_{n\times 1}=0$　(1)非齐次线性方程组 $A_{m\times n}*X_{n\times 1}=b$　(2)无解、有惟一解、有无穷多解的条件；学会用矩阵的秩判断以上各方程组解的情况；在 MATLAB 环境下学会求线性方程组的解；对“矛盾”线性方程组，学会求它的最小二乘解。

实验准备：

判断(1)、(2)方程组各种情况下解的状况的方法：

1. 如果 $r(A)=n$，n 元齐次线性方程组 (1) 有惟一零解；
2. 如果 $r(A)<n$，n 元齐次线性方程组 (1) 除零解外，还有非零解；
3. 如果 $r(A)=r(\bar{A})=n$，则非齐线性方程组(2)有惟一解；
4. 如果 $r(A)=r(\bar{A})<n$，则非齐线性方程组(2)有无穷多解；
5. 如果 $r(A)\neq r(\bar{A})$，则非齐次线性方程组无解。

了解最小二乘解的概念，学会在 MATLAB 环境下求最小二乘解。

rank(a)　　求矩阵 a 的秩；

pinv(a)　　求矩阵 a 的伪逆；

实验演示：

1. 线性方程组的解

例 1　解线性方程组：

$$x_1-2x_2+x_3=-2,$$
$$-3x_1+x_2+2x_3=1,$$
$$x_1-x_2+x_3=0。$$

 **说明：** 在线性方程组的求解中，正斜杠“/”和反斜杠“\”是两个表现力极强的符号，方程 $AX=B$ 的解用 $X=A\backslash B$ 来表示，而方程 $XA=B$ 的解用 $X=B/A$ 来表示。平时常用的形式为前者。

解：先判断方程组解的情况：

```
a=[1–2 1;–3 1 2;1 –1 1]                    % 定义矩阵 a
a =
       1      –2       1
      –3       1       2
       1      –1       1
a1=[1 –2 1 –2;–3 1 2 1;1 –1 1 0]           % 定义 a 的增广阵为 a1
a1 =
       1      –2       1      –2
      –3       1       2       1
       1      –1       1       0
rank(a)
ans =
       3
rank(a1)
ans =
       3
```

$r(a)=r(a1)=n$，即矩阵 a 的秩、a 的增广矩阵 $a1$ 的秩和方程组未知数的个数相等，所以原方程组有且仅有惟一一组解，下面求解：

```
b=[-2; 1; 0]
b =
      –2
       1
       0
x=a\b
x =
     1.0000
     2.0000
     1.0000
```

即解为 $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=1 \end{cases}$。

例 2　求方程组：$\begin{cases} 21x_1+34x_2+20x_3=10, \\ 5x_1+78x_2+20x_3=20, \\ 21x_1+14x_2+17x_3=30, \\ 34x_1+31x_2+38x_3=40。 \end{cases}$ 的解。

解：

```
a=[21 34 20;5 78 20;21 14 17;34 31 38];
rank(a)
ans =
      3
a1=[21 34 20 10;5 78 20 20;21 14 17 30;34 31 38 40]
rank(a1)
ans =
      4
```

矩阵 a 的秩与增广阵 a1 的秩不等，即 $r(a)\neq r(\bar{a})$，所以该非齐次线性方程组无解。在例 6 中，我们将研究这类方程组的最小二乘解。

例 3　已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ -x_2+3x_3=2 \\ -2x_3+3x_4=1 \\ -x_1+x_4=0 \end{cases}$，判断方程组解的情况；若有解，求解。

解：

```
A=[1 2 0 0;0 -1 3 0;0 0 -2 3;-1 0 0 1]
A =
      1     2     0     0
      0    -1     3     0
      0     0    -2     3
     -1     0     0     1
rank(A)
ans =
      4
A1=[1 2 0 0 3;0 -1 3 0 2;0 0 -2 3 1;-1 0 0 1 0]
A1 =
      1     2     0     0     3
      0    -1     3     0     2
      0     0    -2     3     1
     -1     0     0     1     0
rank(A1)
ans =
      4
```

即 $R(A)=R(\bar{A})=n$，所以方程组有解且惟一。

```
b=[3
2
```

```
1
0];
x=A\b
x =
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
```

即解为$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$。

例 4　判断线性方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$解的情况；如果有解，请求出解。

解：

```
a=[2 4 2 2 0;3 6 2 –1 0;–1 –2 1 7 0]
a =
     2     4     2     2     0
     3     6     2    –1     0
    –1    –2     1     7     0
rank(a)
ans =
     2
```

齐次方程组的秩为 $r(a)=2<n=4$,所以方程组有无穷多解。下面在 MATLAB 中进行初等行变换：

```
a(1,:)=a(1,:)/a(1,1)
a =
     1     2     1     1     0
     3     6     2    –1     0
    –1    –2     1     7     0
a(2,:)=a(2,:)-a(2,1)*a(1,:)
a =
     1     2     1     1     0
     0     0    –1    –4     0
    –1    –2     1     7     0
a(3,:)=a(3,:)-a(3,1)*a(1,:)
a =
     1     2     1     1     0
```

```
      0     0    -1    -4     0
      0     0     2     8     0
a(2,:)=a(2,:)/a(2,3)
a =
      1     2     1     1     0
      0     0     1     4     0
      0     0     2     8     0
a(3,:)=a(3,:)-a(3,2)*a(2,:)
a =
      1     2     1     1     0
      0     0     1     4     0
      0     0     2     8     0
a(3,:)=a(3,:)-a(3,3)*a(2,:)
a =
      1     2     1     1     0
      0     0     1     4     0
      0     0     0     0     0
a(1,:)=a(1,:)-a(2,:)*a(2,3)
a =
      1     2     0    -3     0
      0     0     1     4     0
      0     0     0     0     0
```

即：$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_4=0 \\ x_2=x_2 \\ x_3+4x_4=0 \\ x_4=x_4 \end{cases}$，无穷多解为：$\begin{cases} x_1=-2c_1+3c_2 \\ x_2=c_1 \\ x_3=-4c_2 \\ x_4=c_2 \end{cases}$　c_1,c_2为任意常数。

例 5　判断线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1-2x_2+2x_3-x_4=1 \end{cases}$，解的情况；如果有解，请求出解。

解：在线性代数的学习中，我们知道：当矩阵A的秩等于A的增广阵的秩并且小于未知数的个数n时，也就是说线性无关的方程的个数小于未知数的个数，这时方程组有无穷多个解。

```
A=[1 -1 1 -1;1 1 1 -1;2 -2 2 -1];
a=[1 -1 1 -1 0;1 1 1 -1 2;2 -2 2 -1 1]    % 为下面输入方便，a 定义为 A 的增广矩阵；
a =
      1    -1     1    -1     0
      1     1     1    -1     2
      2    -2     2    -1     1
```

```
rank(A)
ans =
      3
rank(a)
ans =
      3
```

下面在 MATLAB 中进行初等行变换:

```
a(2,:)=a(2,:)-a(2,1)*a(1,:)
a =
      1    -1     1    -1     0
      0     2     0     0     2
      2    -2     2    -1     1
a(3,:)=a(3,:)-a(3,1)*a(1,:)
a =
      1    -1     1    -1     0
      0     2     0     0     2
      0     0     0     1     1
a(2,:)=a(2,:)/a(2,2)
a =
      1    -1     1    -1     0
      0     1     0     0     1
      0     0     0     1     1
a(1,:)=a(1,:)+a(2,:)
a =
      1     0     1    -1     1
      0     1     0     0     1
      0     0     0     1     1
a(1,:)=a(1,:)+a(3,:)
a =
      1     0     1     0     2
      0     1     0     0     1
      0     0     0     1     1
```

$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$，即无穷多解为$\begin{cases} x_1 = -c + 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = c \\ x_4 = 1 \end{cases}$ c 为任意常数。

基础解系为$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$，特解为$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$。

2. 线性方程组的最小二乘解：

在科学实验与经济问题中，人们常常会得到“矛盾线性方程组”，即 $r(A) \neq r(\bar{A})$，常常表现为方程的个数大于未知数的个数，其实际意义应如何看待呢？我们来看下面的例子：

例 6　收入与消费之间存在着密切的关系：收入越多，消费水平也越高；收入较少，消费水平就越低。这个关系通常用下列关系式来表示：$y = a + bx$　(1)，其中 y 表示收入，x 表示支出，a,b 是两个常数，需要根据具体的统计数据来确定。现以如下统计数据表示 3 年中每年的人均收入与支出情况：(单位：万元)

表 9.1　收入与支出情况表

收支\年	1	2	3
y	1.6	1.7	2.0
x	1.2	1.4	1.8

请根据这组数据求出(1)式中的 a,b 值。

解：将 x,y 的值代入(1)式得方程组：

$$\begin{cases} a + 1.2b = 1.6 \\ a + 1.4b = 1.7 \\ a + 1.8b = 2.0 \end{cases} \quad (2)$$

```
A=[1 1.2;1 1.4;1 1.8]
A =
    1.0000    1.2000
    1.0000    1.4000
    1.0000    1.8000
b=[1.6;1.7;2.0]
b =
    1.6000
    1.7000
    2.0000
A1=[1 1.2 1.6;1 1.4 1.7;1 1.8 2.0];
rank(A)
ans =
     2
rank(A1)
ans =
```

3

即 $r(A)\neq r(\bar{A})$，说明线性方程组 $Ax=b$ 即(2)无解。那么是不是该问题就没有实际意义了呢？当然不是。第一，收入与支出的线性关系是假定的，这个假定本身就会有误差；第二，统计数据本身会有误差；第三，人们为了使结果更具有普遍性，往往会让测量或实验的次数多一些，这样必然会使线性方程组中的方程式的个数大大超过未知数的个数。解决问题的方法是求出使 $\|Ax-b\|$ 取最小值的 x。把这样得到的解，叫作线性方程组(2)的最小二乘解。在线性代数中证明了这个解为：$x=(A|*A)^{-1}*A|*b$。

在 MATLAB 中，我们操作如下：

```
c=inv(A'*A)
c =
    11.8571    -7.8571
    -7.8571     5.3571
x=c*A'*b
x =
     0.7714
     0.6786
```

即 a=0.7714, b=0.6786。

事实上使用除法算子“\”或“/”可以自动求出使 $\|Ax-b\|$ 取最小值的最小二乘解 x，操作如下：

```
x=A\b
x =
     0.7714
     0.6786
```

因此，y=0.7714+0.6786x (3)。下面用其他的 a,b 值检验一下上面求到的值是否符合最小二乘法的要求，也就是使

$[(a+1.2b)-1.6]^2+[(a+1.4b)-1.7]^2+[(a+1.8b)-2.0]^2$ 最小。

```
x=[1.2 1.4 1.8]
x =
     1.2000     1.4000     1.8000
y=0.7714+0.6786*x
y =
     1.5857     1.7214     1.9929
d=(y(1)-1.6).^2+(y(2)-1.7).^2+(y(3)-2.0).^2
d =
   7.1429e-004
```

可以看到，用求出的拟合方程(3)求出的 y 值与给出的统计数据 y 相近，$\|Ax-b\|$ 约为 0.0007 也较小。任意换一组 a,b 值，再求 y 值和 $\|Ax-b\|$ 值:

```
y=0.3658+0.2617*x
```

```
y =
    0.6798    0.7322    0.8369
d=(y(1)-1.6).^2+(y(2)-1.7).^2+(y(3)-2.0).^2
d =
    3.1363
```

显然，与上面的结果相比误差要更大。

实验三　线性规划

问题：

在现实生活中经常会遇到在有限资源(如人力、原材料、资金)的情况下，如何合理安排，从而使效益达到最大；或者对给定的任务，如何统筹安排现有的资源去完成而成本又最小。这类现实中的优化问题，都可以用线性规划的数学模型来描述。1947 年，美国学者丹青格给出线性规划的一般解法——单纯形方法后，线性规划的理论和方法趋向于成熟。特别是计算机软件技术的不断进步，不仅使最优化问题的研究成为一种迫切的现实需要，而且由于有了求解工具，必将推动最优化理论迅速发展，使其在科学管理中发挥越来越重要的作用。

实验目的：

理解线性规划问题的有关概念，学会建立线性规划模型，学会用 MATLAB 语句解线性规划问题。

实验准备：

理解线性规划问题模型的概念，掌握以下求解线性规划问题的 MATLAB 语句。

Linprog 函数

功能：求解线性规划问题。

数学模型：

$$\min_x \ f^T x$$

$$A \cdot x \le b$$
$$Aeq \cdot x = beq$$
$$lb \le x \le ub$$

其中 f,x, Aeq b,beq,lb 和 ub 为向量，A 和 Aeq 为矩阵。

语法：

```
x=linprog(f,A,b,Aeq, beq)
x= linprog(f,A,b,Aeq, beq,lb,ub)
x= linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)
x= linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
[x,fval]=linprog(...)
```

[x,fval,exitflag]=linprog(…)

[x,fval,exitflag,output]=linprog(…)

[x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(…)

描述：

x=linprog(f, A, b) 求解问题 min f*x，约束条件为 A*x<=b。

x=linprog(f, A, b, Aeq, beq) 求解上面的问题，但增加等式约束 *Aeq**x=*beq*；若没有不等式存在，则令 A=[ ]，b=[ ]。

x=linprog(f, A, b, Aeq, beq，lb, ub) 定义设计变量 x 的下界 *lb* 和上界 *ub*，使得 x 始终在该范围内；若没有等式约束，则令 *Aeq*=[ ]，*beq*=[ ]。

x=linprog(f, A, b, Aeq, beq，lb, ub, x0) 设置初值为 x0，该选项只适用于中型问题，默认时大型算法将忽略初值。

x=linprog(f, A, b, Aeq, beq，lb, ub, x0, options) 用 options 指定的优化参数进行最小化。

[x, fval]=linprog(…) 返回解 x 处的目标函数值 fval。

[x, fval, exitflag]=linprog(…) 返回 exitflag 值，描述函数计算的退出条件。

[x, fval, exitflag, output]=linprog(…) 返回包含优化信息的输出变量 output。

[x, fval, exitflag, output, lambda]=linprog(…) 将解 x 处的拉格朗日乘子返回到 lambda 参数中。

变量：

lambda 参数

lambda 参数是解 x 处的拉格朗日乘子，它有以下一些属性：

- lambda.lower–lambda 的下界；
- lambda.upper–lambda 的上界；
- lambda.ineqlin–lambda 的线性不等式；
- lambda.eqlin–lambda 的线性等式。

其他参数意义同前。

实验演示：

例 1 求解下列规划问题：

目标函数 $\min f(x) = -5x_1 - 4x_2 - 6x_3$

约束条件 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 20 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x \le 42 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 30 \\ 0 \le x_1, 0 \le x_2, 0 \le x_3 \end{cases}$

用 MATLAB 计算如下：

```
>> f=[-5;-4;-6];
>> A=[1 1 1
      3 2 4
      3 2 0];
>> b=[20;42;30];
```

```
>> lb=zeros(3,1);
>> [x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
Optimization terminated successfully.
x =
  0.0000
    15.0000
     3.0000
fval =
-78.0000
exitflag =
1
```

例 2　生产决策问题。

某厂生产甲乙两种产品，已知制成一吨产品甲需用资源 A 3 吨，资源 B 4 m^3；制成一吨产品乙需用资源 A 2 吨，资源 B 6 m^3，资源 C 7 个单位。若一吨产品甲和乙的经济价值分别为 7 万元和 5 万元，3 种资源的限制量分别为 90 吨、200 m^3 和 210 个单位，试决定应生产这两种产品各多少吨才能使创造的总经济价值最高。

解：令生产产品甲的数量为 x_1，生产产品乙的数量为 x_2。由题意可以建立下面的模型：

$$\begin{cases} \max z = 7x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 90 \\ 4x_1 + 6x_2 \le 200 \\ 7x_2 \le 210 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

该模型中要求目标函数最大化，需要按照 MATLAB 的要求进行转换，即目标函数为

$$\min z = -7x_1 - 5x_2$$

用 MATLAB 计算如下：

```
>> f=[-7;-5];
>> A=[3 2
4 6
0 7];
>> b=[90;200;210];
>> lb=zeros(2,1);
>> [x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
        Optimization terminated successfully.

x =
  14.0000
  24.0000
fval =
  -218.0000
```

exitflag =

1

由上可知，生产甲种产品 14 吨、乙种产品 24 吨创造的总价值最高，为 218 万元。exitflag=1 表示过程正常收敛于 x 处。

例 3　投资问题。

某单位有一批资金用于 4 个工程项目的投资，用于各工程项目时所得到的净收益(投入资金的百分比)如表 9.2 所示。

表 9.2　净收益表

工程项目	A	B	C	D
收益(%)	15	10	8	12

由于某种原因，决定用于项目 A 的投资不大于其他各项投资之和；而用于项目 B 和 C 的投资要大于项目 D 的投资。试确定使该单位收益最大的投资分配方案。

解：用 x_1,x_2,x_3 和 x_4 分别代表用于项目 A、B、C 和 D 的投资百分数，由于各项的投资百分数之和必须等于 100%，所以　$x_1+x_2+x_3+x_4=1$。

据题意，可以建立下面的数学模型：

$$\begin{cases}\max z=0.15x_1+0.1x_2+0.08x_3+0.12x_4\\ x_1-x_2-x_3-x_4\le 0\\ x_2+x_3-x_4\ge 0\\ x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_i\ge 0,i=1,2,\cdots,4\end{cases}$$

将它转换为标准形式：

$$\begin{cases}\min z=-0.15x_1-0.1x_2-0.08x_3-0.12x_4\\ x_1-x_2-x_3-x_4\le 0\\ -x_2-x_3+x_4\le 0\\ x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_i\ge 0,i=1,2,\cdots,4\end{cases}$$

请读者用 MATLAB 自行完成计算：

4 个项目的投资百分数分别为 0.50、0.25、0.00 和 0.25 时，可使该单位获得最大的收益，最大收益为 13%。

例 4　工件加工任务分配问题。

某车间有两台机床甲和乙，可用于加工 3 种工件。假定这两台机床的可用台时数分别为 700 和 800，3 种工件的数量分别为 300、500 和 400，且已知用 3 种不同机床加工单位数量的不同工件所需的台时数和加工费用如表 9.3 所示，问怎样分配机床的加工任务，才能既满足加工工件的要求，又使总加工费用最低?

表 9.3　加工费用表

机床类型	单位工作所需加工台时数			单位工作的加工费用			可用台时数
	工件 1	工件 2	工件 3	工件 1	工件 2	工件 3	
甲	0.4	1.1	1.0	13	9	10	700
乙	0.5	1.2	1.3	11	12	8	800

解：设在甲机床上加工工件 1，2 和 3 的数量分别为 x_1，x_2 和 x_3，在乙机床上加工工件 1，2 和 3 的数量分别为 x_4，x_5 和 x_6。根据 3 种工件的数量限制，有

$$x_1 + x_4 = 300\ (\text{对工件 1})$$

$$x_2 + x_5 = 500\ (\text{对工件 2})$$

$$x_3 + x_6 = 400\ (\text{对工件 3})$$

再根据机床甲和乙的可用台时限制，可以得到其他约束条件。以总加工费用最少为目标函数，组合约束条件，可以得到下面的数学模型：

$$\begin{cases} \min z = 13x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 11x_4 + 12x_5 + 8x_6 \\ x_1 + x_4 = 300 \\ x_2 + x_5 = 500 \\ x_3 + x_6 = 400 \\ 0.4x_1 + 1.1x_2 + x_3 \le 700 \\ 0.5x_4 + 1.2x_5 + 1.3x_6 \le 800 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

用 MATLAB 计算如下：

```
>> f=[13;9;10;11;12;8];
>> A=[0.4 1.1 1 0 0 0
      0 0 0 0.5 1.2 1.3];
>> b=[700;800];
>> Aeq=[1 0 0 1 0 0
        0 1 0 0 1 0
        0 0 1 0 0 1];
>> beq=[300 500 400];
>> lb=zeros(6,1);
>>[x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
Optimization terminated successfully.
x =
  0.0000
  500.0000
  0.0000
  300.0000
```

```
  0.0000
  400.0000
fval =
  1.1000e+004
exitflag =
  1
```

可见，在甲机床上加工 500 个工件 2，在乙机床上加工 300 个工件 1、加工 400 个工件 3，可在满足条件的情况下使总加工费最小为 11000 元，收敛正常。

例 5 裁料问题。

在某建筑工程施工中需要制作 10000 套钢筋，每套钢筋由 2.9m,2.1m 和 1.5m 三种不同长度的钢筋各一根组成，它们的直径和材质相同。目前在市场上采购到的同类钢筋的长度每根均为 7.4 m，问应购进多少根 7.4 m 长的钢筋才能满足工程的需要？

分析共有多少种不同的裁减方法，该问题的可能材料方案如表 9.4 所示。

表 9.4 材料方案表

下料长度(m)	裁料方案编号 i							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2.9	2	1	1	1	0	0	0	0
2.1	0	2	1	0	3	2	1	0
1.5	1	0	1	3	0	2	3	4
料头长(m)	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4

解：设以 $x_i(i=1,2,\cdots,8)$ 表示按第 i 种裁料方案下料的原材料数量，则可得该问题的数字模型：

$$\begin{cases}\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10000 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 = 10000 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 = 10000 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,8\end{cases}$$

用 MATLAB 计算如下：

```
f=[1;1;1;1;1;1;1;1];
 Aeq=[2 1 1 1 0 0 0 0
 0 2 1 0 3 2 1 0
 1 0 1 3 0 2 3 4];
beq=[10000 10000 10000];
lb=zeros(8,1);
[x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(f,[],[],Aeq,beq,lb)
Optimization terminated successfully.
x =
```

```
    1.0e+003 *
    2.2526
    3.7474
    0.0000
    1.7474
    0.0000
    1.2526
    0.0000
    0.0000
fval =
  9.0000e+003
exitflag =
     1
```

所以最节省的情况需要购进 9000 根 7.4m 长的钢筋，其中第 1 种方 案使用 2253 根，第 2 种方案使用 3747 根，第 4 种方案使用 1747 根，第 6 种方案使用 1253 根。

例 6　工作人员计划安排问题

某昼夜服务的公共交通系统每天各时间段(每 4 小时为一个时间段)所需的值班人数如表 9.5 所示，这些值班人员在某一时段开始上班后要连续工作 8 个小时(包括轮流用餐时间)，问该公交系统至少需要多少名工作人员才能满足值班的需要。

表 9.5　所需人数

班　次	时 间 段	所需人数
1	6:00～10:00	60
2	10:00～14:00	70
3	14:00～18:00	60
4	18:00～22:00	50
5	22:00～2:00	20
6	2:00～6:00	30

解：设 x_i 为第 i 个时间段开始上班的人员数，据题意建立下面的数学模型：

$$\begin{cases} \min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1 + x_6 \ge 60 \\ x_1 + x_2 \ge 70 \\ x_2 + x_3 \ge 60 \\ x_3 + x_4 \ge 50 \\ x_4 + x_5 \ge 20 \\ x_5 + x_6 \ge 30 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

将它转换为标准形式：

$$
\begin{cases}
\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
-x_1 - x_6 \le -60 \\
-x_1 - x_2 \le -70 \\
-x_2 - x_3 \le -60 \\
-x_3 - x_4 \le -50 \\
-x_4 - x_5 \le -20 \\
-x_5 - x_6 \le -30 \\
x_i \ge 0, i = 1,2,\cdots,6
\end{cases}
$$

用 MATLAB 计算如下：

```
>> f=[1;1;1;1;1;1];
>> A=[-1 0 0 0 0 -1
      -1 -1 0 0 0 0
      0 -1 -1 0 0 0
      0 0 -1 -1 0 0
      0 0 0 -1 -1 0
      0 0 0 0 -1 -1];
>> b=[-60;-70;-60;-50;-20;-30];
>> lb=zeros(6,1);
>> [x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
Optimization terminated successfully.
x =
    41.9176
    28.0824
    35.0494
    14.9506
    9.8606
    20.1394
fval =
  150.0000
exitflag =
  1
```

可见，只要 6 个时段分别安排 42 人、28 人、35 人、15 人、10 人和 20 人就可以满足值班的需要，共计 150 人，计算收敛。

例 7　厂址选择问题。

考虑 A、B、C 三地，每地都出产一定数量的原料，也消耗一定数量的产品，见表 9.6 所示。已知制成每吨产品需 3 吨原料，各地之间的距离为：A–B：150km，A–C：100 km，B–C：200 km。假定每万吨原料运输 1 km 的运价是 5000 元，每万吨产品运输 1 km 的运价

是 6000 元。由于地区条件的差异，在不同地点设厂的生产费用也不同。问究竟在哪些地方设厂，规模多大，才能使总费用最小？另外，由于其他条件限制，在 B 处建厂的规模(生产的产品数量)不能超过 5 万吨。

表 9.6　产品表

地　点	年产原料(万吨)	年销产品(万吨)	生产费用(万元/万吨)
A	20	7	150
B	16	13	120
C	24	0	100

解：令 x_{ij} 为由 i 地运到 j 地的原料数量(万吨)，y_{ij} 为由 i 地运往 j 地的产品数量(万吨)，i,j=1,2,3(分别对应 A、B、C 三地)。根据题意，可以建立问题的数学模型(其中目标函数包括原材料运输费、产品运输费和生产费)：

$$\begin{cases} \min z = 75x_{12} + 75x_{21} + 50x_{13} + 50x_{31} + 100x_{23} + 100x_{32} \\ +150y_{11} + 240y_{12} + 210y_{21} + 120y_{22} + 160y_{31} + 220y_{32} \\ 3y_{11} + 3y_{12} + x_{12} + x_{13} - x_{21} - x_{31} \le 20 \\ 3y_{21} + 3y_{22} - x_{12} + x_{21} + x_{23} - x_{32} \le 16 \\ 3y_{31} + 3y_{32} - x_{13} - x_{23} + x_{31} + x_{32} \le 24 \\ y_{11} + y_{21} + y_{31} = 7 \\ y_{12} + y_{22} + y_{32} = 13 \\ y_{21} + y_{22} \le 5 \\ x_{ij} \ge 0, i, j = 1,2,3; i \ne j \\ y_{ij} \ge 0, i = 1,2,3; j = 1,2 \end{cases}$$

用 MATLAB 计算如下：

```
>> f=[75;75;50;50;100;100;150;240;210;120;160;220];
>> A=[1 -1 1 -1 0 0 3 3 0 0 0 0
      -1 1 0 0 1 -1 0 0 3 3 0 0
      0 0 -1 1 -1 1 0 0 0 0 3 3
      0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 ];
>> b=[20;16;24;5];
>> Aeq=[0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0
        0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1];
>> beq=[7;13];
>> lb=zeros(12,1);
>> [x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
Optimization terminated successfully.
x =
     0.0000
     1.0000
```

```
     0.0000
     0.0000
     0.0000
     0.0000
     7.0000
     0.0000
     0.0000
     5.0000
     0.0000
     8.0000
fval =
  3.4850e+003
exitflag =
  1
```

要使总费用最小，需要 B 地向 A 地运送 1 万吨，A、B、C 三地的建厂规模分别为 7 万吨、5 万吨和 8 万吨，最小总费用为 3485 万元。

例 8　确定职工编制问题。

某厂每日 8 小时的产量不低于 1800 件。为了进行质量控制，计划聘请两种不同水平的检验员。一级检验员的标准为：速度 25 件/小时，正确率 98%，计时工资 4 元/小时；二级检验员的标准为：速度 15 件/小时，正确率 95%，计时工资 3 元/小时。检验员每错检一次，工厂要损失 2 元。为使总检验费用最省，该工厂应聘一级、二级检验员各多少名？

解：设需要一级和二级检验员的人数分别为 $x1$ 和 $x2$ 名，每个一级检验员实际每天费用为 4*8+25*8×2%*2=40 元，每个二级检验员实际每天费用为 3*8+15*8*5%*2=36 元，所以建立下面的模型：

$$\begin{cases} \min z = 40x_1 + 36x_2 \\ x_1 \le 8 \\ x_2 \le 10 \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 45 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

将它转换为标准形式：

$$\begin{cases} \min z = 40x_1 + 36x_2 \\ x_1 \le 8 \\ x_2 \le 10 \\ -5x_1 - 3x_2 \le -45 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

请读者在 MATLAB 中自行完成计算。

招聘一级检验员 8 名、二级检验员 2 名可使总检验费最省，约为 380.00 元，计算收敛。

例 9　生产计划的最优化问题。

某工厂生产 A 和 B 两种产品，它们需要经过 3 种设备的加工，其工时如表 9.7 所示。设备一、二和三每天可使用的时间分别不超过 12、10 和 8 小时。产品 A 和 B 的利润随市场的需求有所波动，如果预测未来某个时期内 A 和 B 的利润分别 4000 元/吨和 3000 元/吨，问每天应安排产品 A、B 各多少吨，才能使工厂获利最大？

表 9.7　产品吨数表

产　品	设备一	设备二	设备三
A(小时/吨)	3	3	4
B(小时/吨)	4	3	2
设备每天最多可工作时数(小时)	12	10	8

解：设每天应安排生产产品 A 和 B 分别为 x_1 吨和 x_2 吨，由题意建立下面的数学模型：

$$\begin{cases}\max z = 4x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

将它转换为标准形式：

$$\begin{cases}\min z = -4x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

用 MATLAB 计算如下：

```
>> f=[-4;-3];
>> A=[3 4
      3 3
      4 2];
>> b=[12;10;8];
>> lb=zeros(2,1);
>> [x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
Optimization terminated successfully.
x =
    0.8000
    2.4000
fval =
```

-10.4000
exitflag =
1

所以，每天生产 A 产品 0.8 吨、B 产品 2.4 吨可使工厂获得最大利润。

实验四　投资决策——非线性规划

问题：

线性规划的目标函数和约束条件都是其自变量的线性函数，如果目标函数或约束条件包含自变量的非线性函数，则这样的规划问题就属于非线性规划。非线性规划也是我们进行科学管理的常用工具。

实验目的：

学会用 MATLAB 语句求解非线性规划问题。

实验准备：

理解以下求解非线性规划的 MATLAB 语句的用法：

语法：

```
x=fmincon(fun,x0)
x= fmincon(fun,x0,A,b)
x= fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq)
x= fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x= fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options)
[x,fval]= fmincon(…)
```

说明：

fun:　目标函数；

x0:　迭代的初值；

options：设置优化选项参数；

fval:返回目标函数在最优解 x 点的函数值；

exitflag:返回算法的终止标志。

实验演示：

非线性规划的模型为：　$\min F(x)$

$$s.t\quad G(X)\leqslant 0$$
$$X\geqslant 0$$

其中 X 为 n 维变元向量，$G(X)$为 m 维非线性函数组成的向量,用 MATLAB 求解上述问题　基本步骤分为两步：

1. 建立函数形式的 M 文件 fun .m

```
function [f,g] = fun(X);
f = F(X);
g = [G1(X);G2(X);…;Gm(X)]
```

2. 在命令窗口输入求解非线性规划的命令

基本命令格式如本实验准备中作的部分介绍。

例 1　已知：
$$\begin{cases} x_1 \le 400 \\ 1.1x_1 + x_2 \le 440 \\ 1.21x_1 + 1.1x_2 + x_3 \le 484 \\ 1.331x_1 + 1.21x_2 + 1.1x_3 + x_4 \le 532.4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

求解满足 $\max f = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4}$ 的 x_i　其中 $i = 1,2,3,4$。

解：

按 MATLAB 的规定要求目标函数的最小值：

$\min f = -\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} - \sqrt{x_4}$；

在 MATLAB 中解答如下：

建立 M 文件—totle.m:

```
function y=totle(x)
y=-sqrt(x(1))-sqrt(x(2))-sqrt(x(3))-sqrt(x(4));
```

再输入以下命令：

```
A=[1.1 1 0 0;1.21 1.1 1 0;1.331 1.21 1.1 1];
b=[440;484;532.4];
lb=zeros(4,1);
ub=[400;1000;1000;1000];
x0=[100;100;100;100];
[x,fval]=fmincon('totle',x0,A,b,[],[],lb,ub)
Optimization terminated successfully:
 Magnitude of directional derivative in search direction
  less than 2*options.TolFun and maximum constraint violation
  is less than options.TolCon
Active Constraints:
     11
x =
    84.2345
    107.6351
    128.9034
    148.2397
fval =
```

–43.0821

即 x_1=84.2345,x_2=107.6351,x_3=128.9034,x_4=148.2397 时 max$f$ = 43.0821。

例 2 (投资问题)假设某公司在下一个计划期内可用于投资的总资本为 4000 万元，可供选择的投资项目共有 6 个，分别记为 j = 1，2，3，4，5，6。已知对第 j 个项目的投资总额为 a_j 万元，而收益总额为 c_j 万元。问如何进行投资，才能使利润率最高？

提示：设投资决策变量：

$$x_j = \begin{cases} 1, & 若对第j个项目投资 \\ 0, & 若不对第j个项目投资 \end{cases} \qquad (j = 1,2,3,4,5,6)$$

则该问题可归结为求变量 x_j (j = 1,2,3,4,5,6) ,使利润率最高。这个问题留给读者完成。

习 题 九

1. 计算

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$；

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2$。

2. 解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

3. 判断下列矩阵是否可逆，若可逆，则求出逆矩阵 A^{-1}。

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$；

(2) $A=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$；

(3) $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$；

(4) $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&1&2&2\\1&1&1&2\end{bmatrix}$。

4. 利用方程组的秩判断下列线性方程组解的情况，若有解则求解，对无穷多解，请写出基础解系。

(1) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1,\\2x_1-x_4+2x_3=4,\\4x_1+x_2+4x_3=2;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1+2x_3=1,\\2x_1+x_2+5x_3=-1,\\x_1-x_2+x_3=4;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=7,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4=-2,\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4=12,\\x_2+2x_3+2x_4=23;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4=2,\\3x_1-x_2+5x_3-3x_4=6,\\2x_1+x_2+2x_3-2x_4=8。\end{cases}$

5. 试求下列方程组的最小二乘解：

(1) $\begin{cases}2x_1-x_2=3,\\3x_1+x_2=4,\\x_1+2x_2=2;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}3x_1+2x_2=3,\\x_1+x_2=2,\\2x_1+3x_2=4。\end{cases}$

6. 求解下列线性规划问题：

(1) $\begin{cases}\min z=-x_1+2x_2-x_3,\\-2x_1+x_2+x_3\le 4,\\x_1+2x_2\le 6,\\x_i\ge 0,(i=1,2,3)。\end{cases}$

(2) $$\begin{cases}\max z = 3x_1 - x_2 - x_3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3, \\ -2x_1 + x_3 = 1, \\ x_i \ge 0, (i = 1,2,3)。\end{cases}$$

(3) $$\begin{cases}\min z = 5x_{11} + 6x_{12} + 9x_{13} + 6x_{21} + 11x_{22} + 16x_{23}, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 29, \\ x_{11} + x_{21} = 20, \\ x_{12} + x_{22} = 18, \\ x_{13} + x_{23} = 12, \\ x_{ij} \ge 0, (i = 1,2; j = 1,2,3)。\end{cases}$$

7. 某投资公司用 1000 万元的资金对 A、B 两个企业投资。对企业 A 每投资 1 万元，一年后公司可获利 0.7 万元；对企业 B 每投资 1 万元,两年后公司可获利 2 万元。对企业 A 每次投资期限必须是一年，对企业 B 每次投资期限必须是两年，到期结算后，以本利和作为资金继续对 A、B 两个企业投资。公司应如何投资，使得在第三年底收入最高？

8. 农场 A、B 生产粮食分别为 23 万吨、27 万吨，城市甲、乙、丙需要粮食分别为 17 万吨、18 万吨、15 万吨。要将农场 A、B 生产的粮食运往城市甲、乙、丙，农场 A 到城市甲、乙、丙每万吨粮食的运价分别为 50 万元、60 万元、70 万元，农场 B 到城市甲、乙、丙每万吨粮食的运价分别为 60 万元、110 万元、160 万元。粮食部门应如何组织运输，使得总运费最省？

9. 某实验养鸡场进行胚胎生长的研究，测得 5—18 日鸡龄胚重的资料如下：

日龄	5	6	7	8	9	10	11	12
重量(g)	0. 250	0. 498	0. 846	1. 288	1. 656	2. 662	3. 100	4. 579
日龄	13	14	15	16	17	18		
重量(g)	6. 518	7. 486	9. 948	14. 522	15. 610	19. 914		

已知日龄 t 与胚重 y 的关系为 $y=c_1+c_2e^t$,试求出 c_1、c_2 的值，画出 y 与 t 的拟合曲线，并预测 20 天时胚胎重量。

第 10 章　概率统计与回归分析

实验一　随机事件的概率

问题：

在社会生活与生产活动中存在着大量的随机现象，虽然这种现象具有偶然性，但它确实存在一定的统计规律性，概率论就是一门研究随机现象统计规律性的数学分支。通过本实验，利用样本空间、事件等基本概念对随机现象作了描述，在此基础上展开求各种运算关系的事件概率的讨论。

实验目的：

学会用 Mathcad 语句求加法事件、乘法事件的概率、条件概率，进而利用事件的独立性、全概率公式、贝叶斯公式求相关事件的概率。

实验准备：

熟悉随机事件及其概率的概念，概率的加法法则、乘法法则、独立试验、独立事件的概念，同时还要熟悉全概率公式和贝叶斯定理。

本实验所用 Mathcad 的主要命令：

permut(n,k)：计算排列数 P_n^k 的函数；

combin(n,k)：计算组合数 C_n^k 的函数。

实验演示：

例 1　50 个产品中有 46 个合格品，从中任取 3 件，求其中有废品的概率。

解：设事件 A 表示取到的 3 个产品中有废品，则

$$p(A)=\sum_{k=1}^{3}\frac{C_4^k C_{46}^{3-k}}{C_{50}^3} \tag{1}$$

在 Mathcad 工作界面里，调用内部组合函数，计算如下：

$$k=1..3 \qquad PA_k:=\frac{combin(4,k)\cdot combin(46,3-k)}{combin(50,3)}$$

$$PA=\begin{pmatrix}0\\0.21122449\\0.01408163\\0.00020408\end{pmatrix} \tag{2}$$

P(A):=0+0.211224+0.014082+0.000204

在 Mathcad 中计算得　　$P(A)$=0.225510　　(3)

所以任取 3 件有废品的概率为 0.225510。

 **说明** 以上(1)式中的"等号"是 Mathcad 中的文本区域(红色编辑线)中的等号，没有计算作用，只表示相等关系；(2)，(3)式中的等号是键盘等号，具有计算作用。

例 2　12 个乒乓球中有 9 个新球，3 个旧球，第一次比赛时取出 3 个球用完后放回去，求第二次取到的 3 个球中有 2 个是新球的概率。

解：设事件 A_i 为第一次取到 i 个新球(I=0,1,2,3)，B 为第二次取到 2 个新球，所以由全概率公式得 $P(B)=P(A_0)P(B\mid A_0)+P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)$

$$=\frac{C_9^0}{C_{12}^3}\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}+\frac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}\frac{C_8^2C_4^1}{C_{12}^3}+\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}\frac{C_7^2C_5^1}{C_{12}^3}+\frac{C_9^3}{C_{12}^3}\frac{C_6^2C_6^1}{C_{12}^3}$$

在 Mathcad 中操作如下：

先定义事件 B 的概率：

$$\text{PB:=(combin(12,3))}^{-2}\begin{pmatrix} combin(9,1)\cdot combin(3,2)\cdot combin(8,2)\cdot combin(4,1)\cdots \\ +combin(9,2)\cdot combin(3,1)\cdot combin(7,2)\cdot combin(5,1)\cdots \\ +combin(9,3)\cdot combin(6,2)\cdot combin(6,1)\cdots \\ +combin(9,0)\cdot combin(9,2)\cdot combin(3,1) \end{pmatrix}$$

再在数学区域下(蓝色编辑线)用键盘"="进行计算：

$PB=455.20661157\times10^{-3}$。

例 3　一批产品共有 200 个，有 7 个废品，从中任取 6 件产品，求(1)其中恰有 k 件废品的概率；(2)废品数不超过 4 件的概率。

解：设事件 A 为 6 件产品恰有 $k(k=0,1,2,\cdots,6)$件废品，事件 B 为 6 件产品中废品数不超过 4 件，则

(1)　$P(A)=\dfrac{C_7^kC_{200-7}^{6-k}}{C_{200}^6}$，　　$k=0,1,2,\cdots,6$

用 Mathcad 计算的操作过程如下：

先定义事件 A 的概率：

k:=0..6　　　$PA_k:=\dfrac{combin(7,k)\cdot combin(193,6-k)}{combin(200,6)}$

再在数学区域下(蓝色编辑线)用键盘"="进行计算：

$$PA=\begin{pmatrix}0.8053042445\\0.1799083951\\0.0142784441\\0.0005009980\\0.0000078691\\0.0000000492\\0.0000000001\end{pmatrix}$$

请读者自己回答问题。

(2) 废品数不超过 4 件的概率用 Mathcad 计算的操作过程如下：

先定义事件 B 的概率：$PB:=\sum_{k=0}^{4} PA_k$

再在数学区域下(蓝色编辑线)用键盘“=”进行计算：$PB=0.4552066116$。

例 4　发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“·”及“—”。由于通讯系统受到干扰，当发出信号“·”时，收报台分别以概率 0.8 和 0.2 收到“·”及“—”；当发出信号“—”时，收报台分别以概率 0.1 和 0.9 收到“·”及“—”。求当收报台收到“·”时，发报台确系发出信号“·”的概率；收到“—”时，发报台确系发出信号“—”的概率。

解：设 A_1={发出 “·”}，A_2={发出“—”}，B={收到“·”}，$B1$={收到“—”}；

依题意，有：

$P(A_1)=0.6$，$P(A_2)=0.4$ ；$P(B \mid A_1)=0.8$，$P(B1 \mid A_1)=0.2$ ，

$P(B1 \mid A_2)=0.9$ ，$P(B \mid A_2)=0.1$，得：

$$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(A_i)\cdot P(B|A_i)} \quad (1) \qquad P(A_2 \mid B1)=\frac{P(A_2)\cdot P(B1|A_2)}{\sum_{i=1}^{2} P(A_i)\cdot P(B1|A_i)} \quad (2)$$

用 Mathcad 计算的操作过程如下：

先定义各事件的概率值：

$PA_1:=0.6$　　$PA_2:=0.4$　　$PBA_1:=0.8$　　$PB1A_1:=0.2$　　$PB1A_2:=0.9$　　$PBA_2:=0.1$

$$PA1B:=\frac{PA_1\cdot PBA_1}{\sum_{i=1}^{2} PA_i\cdot PBA_i} \quad (3) \qquad PA2B1:=\frac{PA_2\cdot PB1A_2}{\sum_{i=1}^{2} PA_i\cdot PB1A_i} \quad (4)$$

再在数学区域下(蓝色编辑线)用键盘“=”进行计算：

$PA1B=923.07692308\times10^{-3}$　　　　$PA2B1=750\times10^{-3}$

所以，收报台收到“·”时，发报台确系发出信号“·”的概率为 0.923；收到“—”时，发报台确系发出信号“—”的概率为 0.75。

(1)、(2)所表示的条件概率分别对应 Mathcad 环境下(3)、(4)的条件概率，(3)、(4)左边的函数名是 Mathcad 系统下的条件概率函数名。

实验二　随机变量的概率分布

问题：

在前面对随机事件发生规律的研究中，我们对随机事件的描述仅仅停留在定性描述上面，这对于进一步深入研究随机现象是十分不利的，因此如何采用定量的方法来研究随机现象就是我们面临的一个新问题。随机变量的引入为人们描述各种随机现象，研究它们的性质、规律等带来了极大的方便，随机变量概念的建立为概率统计学科的发展奠定了坚实的基础。本实验介绍用 Mathcad 软件研究随机变量取值的概率及其概率分布。

实验目的：

了解 Mathcad 中常见离散型、连续型随机变量的概率密度函数的表达方法，学会用密度函数求分布律以及掌握上述方法的实际应用。

实验准备：

概率密度函数是刻画随机变量变化规律的函数，在 Mathcad 2001 的函数库中概率密度函数需以字母 d 起头，接着写出随机变量名的简称。例如服从泊松(Poisson)分布的随机变量的概率密度函数记为：dpois。以下给出常见的离散型、连续型随机变量的概率密度函数在 Mathcad 中的函数名，如表 10.1、表 10.2 所示。至于函数表达式，可以在任何一本关于概率的课本中查到，在此不再赘述。

表 10.1 常见离散型随机变量的概率函数表

分布函数	分布名称	随机变量 x 及参数取值范围
dbinom(k,n,p)	二项分布	k 取 0,1,…,n,n 为正整数，0<p<1
dgeom(k,p)	几何分布	k 取大于零的整数,0<p<1
dhypergeom(k,a,b,n)	超几何分布	$K\le$ a,a,b,n 均为正整数,且 a $\ge$ b,n
dpois(k,a)	泊松分布	k 取非负整数值,a>0

表 10.2 常见连续型随机变量的概率密度函数表

分布函数	分布名称	随机变量 及参数取值范围
dhisq(x,a)	χ^2 分布	x $\ge$ 0;a 为正整数
dorm(x,a,b)	正态分布	x,a 为任意实数;b>0
dxp(x,λ)	指数分布	x $\ge$ 0;λ>0
dnif(x,a,b)	均匀分布	A $\le$ x $\le$ b,a,b 为任意实数

实验演示：

1. 二项分布

若随机变量 ξ 的概率分布律为：

$b(k>n,p)=P\{\xi=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$ $(k=0,1,2,\cdots,n)0<p<1$，$q=1-p$，则称 ξ 服从参数 n,p 的二项分布。

2. 超几何分布

如果在 N 件产品中有 D 件不合格品，从中任取 n 件，每次取一件，无放回地连取 n 次，记其中不合格品数为随机变量 ξ，则 ξ 取值的概率为：

$$P\{\xi=k\}=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

称随机变量 ξ 服从超几何分布；若有放回地抽取，则 ξ 服从二项分布。当 $N\to\infty$时，超几何分布以二项分布为极限。

例 1　100 件产品中有 95 件合格品，5 件次品，现从中随机地抽取 10 件，每次取 1 件，

令ξ表示抽取的 10 件产品中的次品数：

(1) 若有放回地抽取，求ξ的分布律；

(2) 若无放回地抽取，求ξ的分布律；

(3) 对以上两种抽样分别求 10 件产品中至少有 2 件次品的概率。

解：

(1) 设 A={取得次品}，则 $p=P(A)=0.05$, $q=p(\bar{A})=0.95$,且 $\xi\sim b(k,10,0.05)$

$$P(\xi=k)=C_{10}^{k}(0.05)^{k}(0.95)^{10-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,10)$$

在 Mathcad 中计算如下：　k:=0..10　　P_k :=dbinom(k,10,0.05)

P_k =

0.5987369392
0.3151247049
0.0746347985
0.0104750594
0.0009648081
0.0000609352
0.0000026726
0.0000000804
0.0000000016
0
0

分布律也可以按如下方法用一个转置矩阵来表示，它是一个电子表格，在表格上按住鼠标左键，拖动滚动条，就可以看到分布律的全貌。

P^T =

	0	1	2	3	4	5
0	0.599	0.315	0.075	0.01	9.648　0 -4	6.094　0 -5

(2) 因为是无放回抽取，ξ的可能取值为 0，1，2，3，4，5，所以ξ服从超几何分布，分布律为：$P(\xi=k)=\dfrac{C_5^k C_{95}^{10-k}}{C_{100}^{10}}$　$(k=0,1,2,3,4,5)$　　k:=0..5

dhypergeom(k,5,95,10) =

0.584
0.339
0.07
6.384　0 -3
2.51　0 -4
3.347　0 -6

至此已不难写出分布律了，在此省略分布律不写。

(3) 有放回抽取时至少有 2 件次品的概率为：

$$P1(\xi\geq 2)=1-P1(\xi<2)=1-P1(\xi=0)-P1(\xi=1)$$

在 Mathcad 中计算如下：

$$P1:=1-0.599-0.315 \ , \ P1=86\times 10^{-3}$$

无放回抽取时至少有 2 件次品的概率为：

$$P2(\xi\geq 2)=1-P2(\xi<2)=1-P2(\xi=0)-P2(\xi=1)$$

在 Mathcad 中计算如下：

$$\mathrm{P2}:=1-0.584-0.339 \quad \mathrm{P2}=0.077$$

3. 泊松分布

有人把泊松分布比喻为构造随机现象的“基本粒子”之一，因为在现实世界中许多随机变量近似地服从泊松分布。例如，某一时间内电话交换台收到的呼唤次数；一段布上的疵点数；一块土地上的害虫数；某保险业务的索赔数等等。

泊松定理表明，当二项分布 $B(k,n,p)$中的 n 充分大而 p 很小时，服从二项分布 $B(k,n,p)$ 的随机变量近似地服从泊松分布 $P(k,\lambda)$，其中 $\lambda=np$,

即 $P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ ($\lambda>0$; $k=0,1,\cdots$; $0<p<1;n\in N$)

例 2 在保险公司里有 2500 名同一年龄和同一社会阶层的人参加了人寿保险，在一年中每个人死亡的概率为 0.002，每个参加保险的人在 1 月 1 日需交 12 元保险费，而在死亡时家属可以从保险公司里领取 2000 元赔偿金，求：

(1) 保险公司亏本的概率；

(2) 保险公司获利分别不少于 10000 元和 20000 元的概率。

解：

(1)保险公司每年总收入为：12×2500=30000 元。设一年中死亡人数为 ξ，则 $\xi\sim B(2500,\ 0.002)$，保险公司在这一年中应付出 2000ξ 元，当 $2000\xi>30000$ 时，即 $\xi>15$(人)时，保险公司亏本的概率为

$$p=P(\xi>15)=\sum_{k=16}^{2500}C_{2500}^k 0.002^k\times 0.998^{2500-k}$$

这一计算用人工操作是不可企及的，即使通过求对立事件的概率，计算量也是很大的。下面用 Mathcad 中的二项分布的概率函数计算以上事件的概率。

$$P:=\sum_{k=16}^{2500}dbinom(k,2500,0.002)\ ,\ P=67.44843594\times 10^{-6}$$

即保险公司在一年里亏本的概率为 0.00006745，这个概率是很小的。因为 n 很大，p 又很小，因此用参数为 $\lambda=np=2500\times 0.002=5$ 的泊松分布近似代替二项分布，则有：

$$P(\xi>15)\approx 1-\sum_{k=0}^{15}\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$$

用 Mathcad 中的泊松分布概率函数计算如下：n:=2500 p:=0.002 λ:=n·p

$$\mathrm{p1}:=\sum_{k=0}^{15}dpois(k,\lambda)\ , \quad \mathrm{p1}=999.93099176\times 10^{-3}$$

所以 $P(\xi>15)=1-0.999931=0.000069$，这与二项分布的计算结果只差 0.0000016。

(2) 用 Mathcad 中的概率函数计算如下：

P(保险公司获利不少于 10000 元)=$P(30000-2000\xi\geq 10000)$=

$$P(\xi\leq 10)=\sum_{k=0}^{10} C_{2500}^{k}0.002^{k}\times 0.998^{2500-k}\approx\sum_{k=0}^{10}\frac{5^{k}\mathrm{e}^{-5}}{k!},$$

$$\mathrm{P}:=\sum_{k+0}^{10} dbinom(k,2500,0.002),\qquad \mathrm{P}=986.39533163\times 10^{-3}$$

用泊松分布计算如下：

$$\mathrm{n}:=2500\qquad \mathrm{P}:=0.002\qquad \lambda:=\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}\qquad \mathrm{p1}:=\sum_{k=0}^{10} dpois(k,\lambda)\ ,\quad \mathrm{p1}=986.3047614\times 10^{-3}\text{。}$$

即保险公司获利不少于 10000 元的概率在 98%以上。

P(保险公司获利不少于 20000 元)=$P(30000-2000\xi\geq 20000)$=

$$P(\xi\leq 5)=\sum_{k=0}^{5} C_{2500}^{k}0.002^{k}\times 0.998^{2500-k}\approx\sum_{k=0}^{5}\frac{5^{k}\mathrm{e}^{-s}}{k!}$$

$$\mathrm{P2}:=\sum_{k=0}^{5} dpois(k,\lambda)\ ,\mathrm{p2}=615.96065483\times 10^{-3}$$

即保险公司获利不少于 20000 元的概率在 61%以上。以上计算结果说明了保险公司乐于开展保险业务的道理。以下通过图像可以看到二项分布的极限与泊松分布的近似状况，如图 10.1 和图 10.2 所示。

n:=2500　　p:=0.002　λ:=5

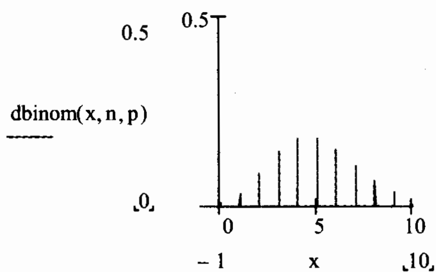


图 10.1　二项分布的近似状况

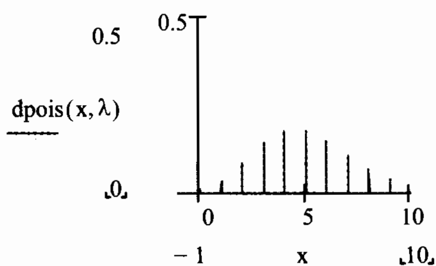


图 10.2　泊松分布的近似状况

把以上两个分布的密度函数的图像——图 10.1 和图 10.2 作在同一个坐标系里，吻合情

况很好，可以更清楚地看到当 $n\to\infty$ 时(本题 n 取作 2500，可以看作 $n\to\infty$)，二项分布趋向于泊松分布的状况。

4. 正态分布

如果连续型随机变量 ξ 的概率密度为：

$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 其中 $-\infty<x, \mu<+\infty, \sigma>0$，$\mu$，$\sigma$ 为常数，这时称随机变量 ξ 服从正态分布，习惯上称 ξ 为正态变量。

正态分布的分布函数为：$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \qquad -\infty<x<+\infty$

特别地，$\mu=0$，$\sigma^2=1$ 的正态分布叫标准正态分布，其密度函数和分布函数分别记为：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty<x<+\infty$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \quad -\infty<x<+\infty$$

一般地，产品的长度、宽度、高度的质量指标，人体的身高、体重等的测量误差，都近似地服从正态分布。从理论方面说，正态分布可以导出其他的一些分布，而某些分布在一定条件下又可以用正态分布来近似。所以正态分布是所有概率分布中最重要的一种分布。

例 3 某商店购进一批灯泡，其使用寿命的分布近似于 μ 值为 1000 小时，σ 为 50 小时的正态分布。任取一只灯泡，试求(1)其使用寿命在 950~1050 小时之间的概率；(2)其使用寿命在 850~1150 小时之间的概率。

解：设该种灯泡的使用寿命为 ξ，则

(1) $P(950<\xi<1050)=P(\xi<1050)-P(\xi<950)$

调用正态分布函数，有：

```
p:=pnorm(1050,1000,50)-pnorm(950,1000,50)
```

在 Mathcad 中计算，得 $p=682.68949214\times10^{-3}$。

$P(850<\xi<1150)=P(\xi<1150)-P(\xi<850)$

调用正态分布函数，有：

```
p:=pnorm(1150,1000,50)-pnorm(850,1000,50)
```

在 Mathcad 中计算，得：$p=997.30020394\times10^{-3}$。

5. 指数分布

一般称由密度函数 $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 定义的分布为指数分布，参数 $\lambda>0$。

一些耐用品的寿命服从指数分布；在泊松流中，观察对象相邻两次出现的间隔时间，例如汽车站、修理部、电话交换台等服务设施在接连两个服务对象到达之间的间隔时间都服从指数分布。

例 4 假如打一次电话所用的时间(以分为单位)服从 $\lambda=0.1$ 的指数分布。试求在排队打电话的人中，后一个人等待前一个人的时间(1)超过 10 分钟；(2)10 分钟到 20 分钟之间的概

率各是多少？

解：设 ξ 表示前一个人打电话所占用的时间，由假定知 ξ 服从参数 λ=0.1 的指数分布。

$$\lambda := 0.1 \qquad p1=P(\xi>10)=\int_{10}^{\infty}\frac{1}{10}e^{\frac{-x}{10}}dx \qquad ①$$

$$p1:=\int_{10}^{\infty} d\exp(x,\lambda)dx \quad 得：p1=367.87944116\times10^{-3} \qquad ②$$

或 $p1:=\int_{10}^{\infty}\frac{1}{10}e^{\frac{-x}{10}}dx$　　得：　　$p1=367.87944116\times10^{-3}$　③

$p2=P(10\le\xi\le 20)$　④

也就是 $p2:=\int_{10}^{20}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx$，　求 p2 的值，得：$p2=232.54415793\times10^{-3}$　⑤

说明： 以上①中的两个“等号”和④中的等号都是 Mathcad 中“数学区域”下(蓝色编辑线)的“粗等号”，没有计算作用，只表示相等关系；②，③，⑤是“数学区域”下(蓝色编辑线)的键盘等号，具有计算作用。

6. 自定义概率函数

前面通过 Mathcad 的函数库，我们已经看到了重要而常见的概率分布函数的应用。要想研究其他的一些随机变量的概率规律，一般需要自定义概率函数和分布函数，再利用 Mathcad 中强大的微积分运算功能，就能完成教科书中几乎所有的概率计算问题。

例 5　已知连续型随机变量 ξ 有概率密度 $p(x)=\begin{cases}kx+1, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$，求系数 k，并计算 $P\{1.5<\xi<2.5\}$。

解：根据概率密度函数性质 $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1$ 有：

$\int_0^2(kx+1)dx=1$　①，求 k，在 Mathcad 中计算：f(k):= $\int_0^2(kx+1)dx-1$，

root(f(k),k)→$\frac{-1}{2}$　即 $k=-\frac{1}{2}$　②

计算 $P(1.5<\xi<2.5)$，在 Mathcad 中做如下操作即可得到该事件的概率：

a. P(x):=if$(0\le x\le 2,-\frac{x}{2}+1,0)$　　$P(x)=62.5\times10^{-3}$　③，或

b. P1:=$\int_{1.5}^{2.5}p(x)dx$，$P1=62.5\times10^{-3}$　④，即 $P(1.5<\xi<2.5)=0.0625$　⑤。

说明：

(1) 以上 1，2，5 中的等号是 Mathcad 中的“粗等号”，没有计算作用，只表示相等关系；3, 4 是键盘等号，具有计算作用。

(2) 这里 a 中求概率是通过 if 函数来实现的，if 函数与 if 控制语句的区别是很大的。if 函数是在键盘上直接输入 if 而得到的，if 控制语句不能直接在键盘上输入，只能通过单击编程工具栏上的 if 按钮来实现。if 控制语句能做一些复杂的嵌套，比 if 函数要灵活得多。

例 6　设随机变量 ξ 的概率密度为 $p(x)=\begin{cases} Cxe^{\frac{-x}{2}} & ,x\ge 0 \\ 0 & ,x<0 \end{cases}$，

(1)　求常数 C;

(2)　求 $P\{1\leqslant \xi \leqslant 4\}$，$P\{\xi>3\}$;

(3)　写出该随机变量的密度函数和分布函数，并作出它们的图像。

解：

(1)根据概率密度函数性质有：$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x=1$

即 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty} x\cdot\exp(-\frac{x}{2})\mathrm{d}x \to 4$　　C • $\int_{0}^{\infty} x\cdot\exp(-\frac{x}{2})\mathrm{d}x \to 4\cdot C$ 即 4C=1

所以 root(4·C-1,C)→ $\frac{1}{4}$　　即 $C=\frac{1}{4}$

(2) P1:= $\int_{1}^{4} \frac{x}{4}\exp(-\frac{x}{2})\mathrm{d}x \to -3\cdot\exp(-2)+\frac{3}{2}\exp(-\frac{1}{2})$

P1=$503.79013986\times 10^{-3}$ ，

P2:= $\int_{3}^{\infty} \frac{x}{4}\exp(-\frac{x}{2})dx \to \frac{5}{2}\exp(-\frac{3}{2})$

P2=$557.82540037\times 10^{-3}$;

(3)　概率密度函数、分布函数分别为：

$p(x)=\begin{cases} \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}} & x\ge 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$　;　　$F(x)=\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{x} \frac{t}{4}e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$　;

作图，先定义概率密度函数：

$$p(x):=\left|\begin{array}{ll} \frac{x}{4}\cdot\exp(-\frac{x}{2}) & if\quad x\ge 0 \\ 0 & otherwise \end{array}\right.$$

再定义分布函数：

F1:= $\int_{0}^{x} \frac{t}{4}\exp(-\frac{t}{2})dt$　　F1(x)→ $\frac{-1}{2}\cdot x\cdot\exp(\frac{-1}{2}x)-\exp(\frac{-1}{2}x)+1$

F1:= $\left|\begin{array}{ll} F1(x) & if\quad x\ge 0 \\ 0 & otherwise \end{array}\right.$ 即 $F(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}+1, x\ge 0 \\ 0, x\ge 0 \end{cases}$。

最后通过二维图形按钮做出概率密度函数和分布函数的图像如图 10.3 所示。

例 7　盒子里装有 3 个黑球，2 个白球，2 个红球，在其中任取 4 个球，以 ξ 表示取到黑球的个数，以 η 表示取到红球的个数，(1)求 ξ 与 η 的联合分布；(2)求 ξ 与 η 的边缘分布；(3) ξ 与 η 是否相互独立？

解：设 ξ 与 η 的可能取值分别为 i 与 j，则 i=0,1,2,3；j=0,1,2。因盒子中有 3 种球，在这 3 种球中任取 4 个球，黑球与红球的个数和 $i+j\le 4$。

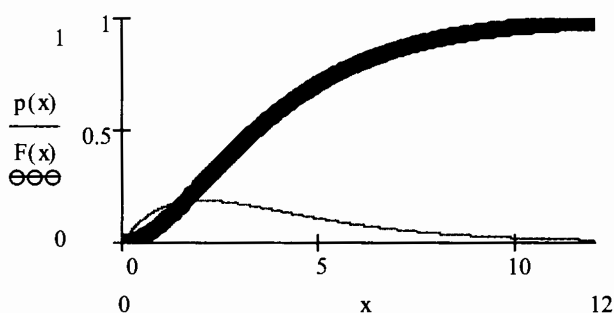


图 10.3　概率密度函数和分布函数的图像

另一方面，白球只有 2 只，则在要取出的 4 只球中，$i+j\geq 2$，所以当 $2\leqslant i+j\leq 4$ 时：

$$P(\xi=i,\quad \eta=j)=\frac{C_3^i C_2^j C_2^{4-i-j}}{C_7^4} \qquad ①$$

当 $i+j<2$ 或 $i+j>4$ 时，$P(\xi=i, \eta=j)=0,(i=0,1,2,3; j=0,1,2)$,至此我们就可以写出联合分布了。下面我们在 Mathcad 中实现以上运算：

(1) 先定义组合函数：

$$m:=7 \qquad n:=4 \qquad C(m,n):=\frac{m!}{n!(n-m)!}$$

再定义联合分布概率函数：

$$i:=0..3 \qquad j:=0..2$$

$$P(i,j):=\frac{C(3,i)\cdot C(2,j)\cdot C(2,4-i-j)}{C(7,4)}\rightarrow\frac{24}{35\cdot i!\cdot(3-i)!\cdot(2-j)!\cdot j!\cdot(4-i-j)!\cdot(-2+i+j)!}$$

再定义联合分布概率矩阵：

$$P_{i,j}:=\text{if}\left(2\leq i+j\leq 4,\ \frac{24}{35\cdot i!\cdot(3-i)!\cdot(2-j)!\cdot j!\cdot(4-i-j)!\cdot(-2+i+j)!},0\right)$$

在 Mathcad 中计算得：

$$P\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{35}\\ 0 & \frac{6}{35} & \frac{6}{35}\\ \frac{3}{35} & \frac{12}{35} & \frac{3}{35}\\ \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & 0\end{pmatrix}，\text{也就是所求 }\xi，\ \eta\text{ 的联合分布为}\begin{pmatrix}\xi\backslash\eta & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{35}\\ 1 & 0 & \frac{6}{35} & \frac{6}{35}\\ 2 & \frac{3}{35} & \frac{12}{35} & \frac{3}{35}\\ 3 & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & 0\end{pmatrix}。$$

(2) 为了求 ξ 与 η 的边缘分布，需定义联合分布矩阵：

$$P:=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{35} \\ 0 & \frac{6}{35} & \frac{6}{35} \\ \frac{3}{35} & \frac{12}{35} & \frac{3}{35} \\ \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & 0 \end{pmatrix}$$

再在 Mathcad 中求 ξ 与 η的边缘分布:

$$P\xi := \sum_j (P)^{<j>} \qquad P\xi = \begin{pmatrix} 0.0286 \\ 0.3429 \\ 0.5143 \\ 0.1143 \end{pmatrix} \qquad ②$$

$$P\eta := \sum_j (P^T)^{<j>} \qquad P\eta = \begin{pmatrix} 0.0857 \\ 0.5143 \\ 0.2857 \end{pmatrix} \qquad ③$$

(3) 由联合分布律可以求到：$P\xi_2=514.28571492\times10^{-3}$。 ④

$P\eta_2=285.71428571\times10^{-3}$。 ⑤

而 $P_{2,2}$： $=\frac{6}{35}$ $\qquad P_{2,2}=171.42857143\times10^{-3}$。 ⑥

$P\xi_2\cdot P\eta_2=146.93877551\times10^{-3}$。 ⑦

$P_{2,2}\neq P\xi_2\cdot P\eta_2$ ，所以 ξ 与 η不相互独立。

 **说明：** 以上①中的等号是 Mathcad 中的“粗等号”，没有计算作用，只表示相等关系；②，③，④，⑤，⑥，⑦中的等号是键盘等号，具有计算作用。

实验三 随机变量的数字特征

问题：

概率分布全面反映了一个随机变量取到各个值或取值于各个区间内的概率的大小，然而实践中可能并不需要，也不容易确切地了解一个随机变量取值规律的全貌，而只需了解它的某些侧面。如描述随机变量平均取值的情况、取值偏离平均值的情况，这些量都更集中，更概括地反映了随机变量的特征，因此我们需要研究用一个或几个统计量来描述随机变量的取值规律。

实验目的：

理解一元离散型随机变量及连续型随机变量的数学期望、方差、标准差的概念，以及二元随机变量协方差的概念；学会利用 Mathcad 中有关命令求出随机变量的数字特征。

实验准备：

1. 离散型随机变量的数字特征

若离散型随机变量ξ的概率函数为$P\{\xi = x_k\} = p_k$，(k=1,2,3,…)。若级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$绝对收敛，则称该级数为离散型随机变量$\xi$的数学期望，即$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$。不难理解，离散型随机变量$\xi$的方差为$Var\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - E\xi)^2 \cdot P_i$。方差有一个简算公式：$Var\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$。根据这些公式，使用 Mathcad 的微积分运算板上的求和按钮，就可以求出常见的离散型随机变量的数学期望和方差。

2. 连续型随机变量的数字特征

设连续型随机变量ξ的密度函数为 $p(x)$，若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x$绝对收敛，则称其为随机变量$\xi$的数学期望，即$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x$。不难理解，连续型随机变量$\xi$的方差为$Var\xi = E(x - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - E\xi)^2 \cdot p(x)\mathrm{d}x$。

3. 随机变量函数的数字特征

设ξ的密度函数为$p(x)$，随机变量函数为$\eta = f(x)$，若η的数学期望存在，则

$$E(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)\mathrm{d}x，\quad D(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)p(x)\mathrm{d}x - [E(\eta)]^2。$$

4. 二维离散型随机变量(*X*，*Y*)的数学特征

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

$P(X = x_i, Y = y_i) = p_{ij}$，

则它的各个分量的数学期望为：

$$EX = \sum_{i=1}\sum_{j=1} x_i \cdot p_{ij} = \sum_i x_i p_i，\quad EY = \sum_{i=1}\sum_{j=1} y_j \cdot p_{ij} = \sum_j y_j p_j。$$

二维离散型随机变量X，Y的协方差

$$Cov(X,Y) = E(X - EX)(Y - EY) = \sum_i\sum_j (x_i - EX)(y_j - EY)p_{ij} = \sum_i\sum_j x_i y_j p_{ij} - EX \cdot EY,$$

相关系数为：$\rho = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$。

实验演示：

例 1　若X是离散型随机变量，$P\{X = x_1\} = \frac{3}{5}, P\{X = x_2\} = \frac{2}{5}$，且$x_1 < x_2$，又知$E(X) = \frac{7}{5}, D(X) = \frac{6}{25}$，求$X$的分布律。

解：依题意，X只取两个值x_1与x_2，于是有$E(X) = \frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 = \frac{7}{5}$，

$D(X)=\frac{3}{5}(x_1)^2+\frac{2}{5}(x_2)^2-(EX)^2=\frac{6}{25}$,

从而得方程组$\begin{cases}3x_1+2x_2=7,\\3x_1{}^2+2x_2{}^2=11.\end{cases}$

在 Mathcad 中计算如下：使用模块“Given-Find”求方程组的解，其操作步骤如下：

(1) 给方程中的每个未知数设定一个初始值；

(2) 输入关键字“Given”；

(3) 在“Given”的下面输入待求解方程组，方程组中每个方程中的等号为逻辑等号，可以单击布尔运算板上的等号按钮；

(4) 调用函数 Find(x,y,z,⋯)，按键盘上的等号键即可。

令 $x_1:=1$ $x_2:=1$

Given

$3\cdot x_1+2\cdot x_2=7$

$3\cdot(x_1)^2+2\cdot(x_2)^2=11$ $\quad \text{Find}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}1.8\\0.8\end{pmatrix}$

因为二元二次方程组有两组解，所以再令：

$x_1:=-1$ $x_2:=1$

Given

$3\cdot x_1+2\cdot x_2=7$

$3\cdot(x_1)^2+2\cdot(x_2)^2=11$ $\quad \text{Find}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

又因为$x_1<x_2$，所以得 X 的分布律$\begin{bmatrix}X & 1 & 2\\ P & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$。

例 2 从数字 0,1,2,⋯，n 中任取两个不同的数字，求这两个数字之差的绝对值的数学期望。

解：设 X 为所选的两个数字之差的绝对值，则 X 的所有可能取值为 1，2，3，⋯，n。

$$P\{X=1\}=\frac{n}{C_{n+1}^2}\qquad P\{X=2\}=\frac{n-1}{C_{n+1}^2}$$

于是 X 的分布律为：$P\{X=k\}=\frac{n-k+1}{C_{n+1}^2},k=1,2,\cdots,n$。

在 Mathcad 中求解如下：

$$EX(n):=\sum_{k=1}^{n}k\cdot(\frac{n-k+1}{combin(n+1,2)})simplify\to\frac{1}{6}\cdot n\cdot\frac{(n^2+3\cdot n+2)}{combin(n+1,2)}$$

再化简一次：$\frac{1}{6}\cdot n\cdot\frac{(n^2+3\cdot n+2)}{\frac{(n+1)\cdot n}{2!}}simplify\to\frac{1}{3}\cdot n+\frac{2}{3}$

即 $EX=\frac{n+1}{3}$。

例 3 设 X 在$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上服从均匀分布，$y=g(x)=\begin{cases}\ln x,x>0\\0,x\le 0\end{cases}$，求随机变量 Y=$g(X)$的数

学期望及方差。

解：依题意，X 的密度函数为：

$$f(x) := \begin{vmatrix} 1 & if \frac{-1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & otherwise \end{vmatrix}, \qquad g(x) := \begin{vmatrix} \ln(x) & if \quad x > 0 \\ 0 & otherwise \end{vmatrix}, \qquad Y=g(x)$$

$$EY(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \ln(x) dx$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \ln(x) dx \to \frac{-1}{2} \cdot \ln(2) - \frac{1}{2}$$ 　　即 $EY = \frac{-1}{2} \cdot \ln(2) - \frac{1}{2}$。

$EY2(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x))^2 \cdot f(x) dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} (\ln(x))^2 dx$　这里“EY2(x)”是 Mathcad 函数名，表示 $E(y^2(x))$。

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} (\ln(x))^2 dx \ \ simplify \to \frac{1}{2} \cdot \ln(2)^2 + \ln(2) + 1$$

而 $D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln(2)^2 + \ln(2) + 1 - \left(\frac{-1}{2} \cdot \ln(2) - \frac{1}{2}\right)^2 simplify \to \frac{1}{4} \cdot \ln(2)^2 + \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + \frac{3}{4}$$

即 $D(Y) = \frac{1}{4} \cdot \ln(2)^2 + \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + \frac{3}{4}$。

例 4　假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2,机器发生故障时，全天停止工作。若一周的 5 天工作日里无故障，可获得利润 10 万元；发生一次故障仍可获得利润 5 万元；发生两次故障所获利润为 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元。求一周期望利润是多少？

解：以 X 表示一周五天里发生故障的天数，则 $X \sim B(5，0.2)$，即 X 的分布律为：

$$P\{X = k\} = C_5^K (0.2)^K (0.8)^{5-K}, k = 0,1,\cdots,5。$$

在 Mathcad 中运算如下：

$k := 0..5$ 　　　　$P_k := dbinom(k,5,0.2)$

$$P = \begin{bmatrix} 0.3277 \\ 0.4096 \\ 0.2048 \\ 0.0512 \\ 6.4 \times 10^{-3} \\ 3.2 \times 10^{-4} \end{bmatrix}。$$

一周五天里发生故障的天数 X 的分布律为：

$$P1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & x \ge 3 \\ 0.3277 & 0.4096 & 0.2048 & 0.0579 \end{bmatrix} \qquad 即\ P1 := \begin{bmatrix} 0.3277 \\ 0.4096 \\ 0.2048 \\ 0.0579 \end{bmatrix}$$

设 Y 表示一周所获得的利润，则 Y 的分布律：

$$Y=g(X)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & x\geq 3\\ 10 & 5 & 0 & -2\end{pmatrix} \qquad Y:=\begin{bmatrix}10\\5\\0\\-2\end{bmatrix}^T$$

$EY:=Y\cdot P1$ $\qquad EY \rightarrow 5.2092$

因此，一周期望利润为 5.21 万元。

例 5　假设国际市场上每年对我国某种出口商品的需求量是随机变量 X(单位：吨)，它服从于[2000，4000]上的均匀分布。设每售出这种商品一吨，可为国家挣得 3 万元；但假设销售不出而囤积于库，则每吨浪费保养费 1 万元。问要组织多少货源，才能使国家的收益最大？

解：设某年出口的商品量为 a 吨时，该年国家可得的收益为 Y 万元，则：

$$Y=g(X)=\begin{cases}3a, \chi\geq a\\ 3x-(a-x), \chi<a\end{cases}(2000\leq a\leq 4000)。$$

于是国家所获得的平均收益为：

$$E(Y)=E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x。$$

在 Mathcad 中求解如下：

$$EY(a):=\frac{1}{2000}\left[\int_{2000}^{a}(4x-a)dx+\int_{a}^{4000}3\cdot adx\right]simplify\rightarrow\frac{-1}{1000}\cdot a^2-4000+7\cdot a$$

也就是：$EY(a):=\frac{-1}{1000}\cdot a^2-4000+7\cdot a$

即期望收益是货源 a 的函数，由极值的第二充分条件，求 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}a}=0$ 的根：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}EY(a)simplify\rightarrow\frac{-1}{500}\cdot a+7$$

$$root\left(\frac{-1}{500}\cdot a+7\cdot a\right)simplify\rightarrow 3500$$　　即 a=3500。

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}EY(a)simplify\rightarrow\frac{-1}{500}$$　　即 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}EY(a)(3500)=\frac{-1}{500}<0$。

所求 a 应为 3500 吨，平均收益达到最大值，即组织 3500 吨货源，才能使国家的收益最大。

例 6 在本章实验二的例 7 中，联合概率分布矩阵：$P=\begin{bmatrix} \xi\backslash\eta & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{35} \\ 1 & 0 & \frac{6}{35} & \frac{6}{35} \\ 2 & \frac{3}{35} & \frac{12}{35} & \frac{3}{35} \\ 3 & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & 0 \end{bmatrix}$，

求边缘分布的期望 $E\xi, E\eta$，方差 $Var\xi, Var\eta$，协方差 $Cov(\xi,\eta)$ 及相关系数 ρ。

解：先定义联合概率密度矩阵及 i,j 的取值矩阵：

$$i:=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix} \qquad j:=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} \qquad P:=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{35} \\ 0 & \frac{6}{35} & \frac{6}{35} \\ \frac{3}{35} & \frac{12}{35} & \frac{3}{35} \\ \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & 0 \end{bmatrix}$$

再在 Mathcad 中依次定义所要求的数字特征如下：

$$E\xi := i\cdot\sum_{j=0}^{2}P^{<j>} \qquad E\xi 2 := i^2\cdot\sum_{j=0}^{2}P^{<j>} \qquad Var\xi := E\xi 2 - E\xi^2$$

$$E\eta := j\cdot\sum_{j=0}^{2}(P^T)^{<j>} \qquad E\eta 2 := j^2\cdot\sum_{j=0}^{2}(P^T)^{<j>} \qquad Var\eta := E\eta 2 - E\eta^2$$

$$E\xi\eta := \sum_{i=0}^{3} i\cdot\left[\sum_{j=0}^{2}(j\cdot P)_{i,j}\right] \to \frac{12}{7} \qquad Cov := E\xi\eta - E\xi\cdot E\eta \qquad \rho := \frac{Cov}{\sqrt{Var\xi}\cdot\sqrt{Var\eta}}$$

$E\xi = 1.7143$ $E\xi 2 = 3.4286$ $Var\xi = 0.4898$ $E\xi\eta = 1.7143$

$E\eta = 1.0857$ $E\eta 2 = 1.6571$ $Var\eta = 0.4784$ $Cov = -0.1469$ $\rho = -0.3036$

故边缘分布的期望： $E\xi = 1.7143$， $E\eta = 1.0857$；

边缘分布的方差： $Var\xi = 0.4898$， $Var\eta = 0.4784$；

联合分布的协方差： $Cov = -0.1469$；

相关系数： $\rho = -0.3036$。

实验四 区间估计和假设检验

问题：

本实验讨论利用 Mathcad 求解统计推断的两类问题:区间估计和假设检验。指出统计量的变异程度，例如说某统计量以某种可能性落在 $\theta \pm \mathrm{d}\theta$ 或 $\theta \pm 2\mathrm{d}\theta$ 之间，这就是参数的区间估计。在实际问题中，常常需要对总体的某些参数作出某些可能的假设，然后根据所得的样本数据，对假设的正确性作出判断，这就是假设检验。通过区间估计和假设检验的有

关计算，可以帮助我们进一步理解有关统计量的概率意义。

实验目的：

1. 了解数学期望和方差的置信区间的概念，学会求正态总体的均值和方差的估计值和置信区间；了解假设检验的基本思想，学会使用 u 检验、t 检验、χ^2 检验进行统计推断；
2. 了解常用统计函数在 Mathcad 中的表示方法，学会在 Mathcad 中求出这些统计函数值，计算参数的置信区间，学会利用 Mathcad 中的程序块进行假设检验。

实验准备：

1. Mathcad 内部函数库中提供了一些统计函数，利用它们可以计算样本的各种数字特征。如表 10.3 仅介绍常见的统计函数。

表 10.3　常见的统计函数表

统计函数	函数名称	统计函数	函数名称
gmean(A,B,C…)	几何平均	mode(A,B,C…)	众数
hmean(A,B,C…)	调和平均	Stdev(A,B,C…)	样本标准差
hist(intvls,A)	直方图函数	Stdev(A,B,C…)	总体标准差
mean(A,B,C…)	算术平均	Var(A,B,C…)	样本方差
median(A,B,C…)	中位数	var(A,B,C…)	总体方差

2. 熟悉区间估计的有关概念、假设检验的概念和一般步骤。
3. 假设检验的类别：

   关于期望的检验：(1)U 检验法（已知方差）；

   　　　　　　　　(2)T 检验法（未知方差）；

   关于方差的检验：(1)χ^2 检验法（一个正态总体）；

   　　　　　　　　(2)F 检验法（两个正态总体）。
4. 熟悉各检验法统计量、相应的置信区间及接受 H_0 的条件。
5. 理解以下求置信区间的 Mathcad 程序：

(1) 一个正态总体均值 μ 的置信区间

在标准差已知和未知两种情况下，程序 CInormal(X，α，σ，k)可以求出正态总体 X 的总体均值 μ 的置信区间，其中 X 为样本观测值向量，参数 1-α 为置信水平，σ 为总体标准差。当总体标准差已知时，k=1；当总体标准差 σ 未知时，k 取任意值。该程序如下：

$$\text{CInormal}(X,\alpha,\sigma):=\left|\begin{array}{l} mu \leftarrow mean(X) \\ (ss \leftarrow \sigma)(N \leftarrow n) \\ t\alpha \leftarrow qnorm(1-\dfrac{\alpha}{2},0,1) \\ \left(mu - t\alpha\cdot\dfrac{ss}{\sqrt{n}} \quad mu + t\alpha\cdot\dfrac{ss}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right.$$

(2) 一个正态总体均值 μ 和方差 σ^2 的置信区间

下面程序用于计算单个正态总体当标准差未知时，正态总体均值的置信区间；以及当

总体均值未知时，正态总体方差的置信区间。输出结果的第一行显示的是均值 μ 的置信区间，第二行是方差 σ 的置信区间。CInorma(X，α) 程序如下：

$$\text{CInorma}(X,\alpha):=\left|\begin{array}{l}(mu \leftarrow mean(X))(s \leftarrow Stdev(X))\\ t\alpha \leftarrow qt(1-\frac{\alpha}{2},n-1)\\ chi1 \leftarrow qchisq\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)\\ chi2 \leftarrow qchisq\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)\\ \begin{bmatrix} mu-t\alpha\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} & mu+t\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}\\ \frac{(n-1)s^2}{chi2} & \frac{(n-1)s^2}{chi1}\end{bmatrix}\end{array}\right.$$

(3) 两个正态总体均值差和方差比的置信区间

设两个正态总体 X 和 Y 相互独立且分别服从均值为 μ_1、μ_2，方差为 σ^2 的正态分布，且具有方差齐性。设 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_{(n_1)}]^T$，$Y=[y_1,y_2,\cdots,y_{(n_2)}]^T$ 为分别取自两个总体的样本数据，$1-\alpha$ 为置信水平，则均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间：

$$\text{Conf2}(X,Y,\alpha):=\left|\begin{array}{l}(n1 \leftarrow length(X))\cdot(n2 \leftarrow length(Y))\cdot(n \leftarrow n1+n2-2)\\ coef \leftarrow \sqrt{\frac{1}{n1}+\frac{1}{n2}}\\ t\alpha \leftarrow qt\left(1-\frac{\alpha}{2},n\right)\\ m \leftarrow mean(X)-mean(Y)\\ std2 \leftarrow \frac{(n1-1)\cdot Stdev(X)^2+(n2-1)\cdot Stdev(Y)^2}{n}\\ (m-t\alpha\cdot\sqrt{std2}\cdot coef \quad m+t\alpha\sqrt{std2}\cdot coef)\end{array}\right.$$

方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间：

$$\text{Confs}(X,Y,\alpha):=\left|\begin{array}{l}(n1 \leftarrow length(X)-1 \quad n2 \leftarrow length(Y)-1)\\ s2 \leftarrow \frac{Stdev(X)^2}{Stdev(Y)^2}\\ \left(f\alpha2 \leftarrow qF\left(\frac{\alpha}{2},n1,n2\right) \quad f\alpha1 \leftarrow qF\left(1-\frac{\alpha}{2},n1,n2\right)\right)\\ \left(\frac{s2}{f\alpha1} \quad \frac{s2}{f\alpha2}\right)\end{array}\right.$$

实验演示：

例 1　对飞机的飞行速度进行 15 次独立实验，测得飞机的最大飞行速度(米/秒)如下：

422.2　418.7　425.6　420.3　425.8

423.1　431.5　428.2　438.3　434.0

412.3　417.2　413.5　441.3　423.7

根据长期的经验，可以认为最大飞行速度服从正态分布，试求 μ，σ^2 的 95%的置信区间。

解：本题是单个正态总体，未知方差 σ^2，求均值 μ 的置信区间，因此用 t 分布进行区间估计。在 Mathcad 中求解如下：

(1) 按如下路径输入 X 列矩阵“X/:=/view/Toolbars/Math/矩阵按钮图标/转置矩阵按钮 M^T/”这时出现了“$(\blacksquare)^T$”(圆括号是后加的)，在占位符两侧加“( )”，输入矩阵数据，这时就得到如下列矩阵 X：

X:=(422.2 418.7 425.6 420.3 425.8 423.1 431.5 428.2 438.3 434.0 412.3 417.2 413.5 441.3 423.7)^T $\partial := 0.05$　$n := 15$；

(2) 按如下路径输入程序 CInorma(X，α)“view/Toolbars/Math/程序按钮/菜单 Programming/Add Line/”系统默认两行，可以通过按钮“Add Line”增加行数。本程序是 5 行“[ ]”中是两行两列矩阵。

菜单“Programming”中的其他按钮都是用来编程的关键字，通过多练习，就可以掌握我们介绍的几个程序块的编制方法。

$$\text{CInorma}(X,\alpha) := \left| \begin{array}{l} (mu \leftarrow mean(X))((s \leftarrow Stdev(X)) \\ t\alpha \leftarrow qt(1-\frac{\alpha}{2}, n-1) \\ chi1 \leftarrow qchisq\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right) \\ chi2 \leftarrow qchisq\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right) \\ \begin{bmatrix} mu - t\alpha \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} & mu + t\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \\ \frac{(n-1)s^2}{chi2} & \frac{(n-1)s^2}{chi1} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$\text{CInorma}(X,\alpha) = \begin{pmatrix} 420.3516 & 429.7418 \\ 38.5291 & 178.786 \end{pmatrix}$，该等式中的等号是键盘等号，通过这个等号计算出了矩阵内的数据。矩阵第一行是 μ 的可信度为 95%的置信区间，第二行是 σ^2 的可信度为 95%的置信区间。

例 2　某车间生产滚珠，设滚珠直径 X 服从正态分布。从某天生产的产品里随机抽取 6 个，量得直径如下(单位：毫米)：

14.70　15.21　14.90　14.91　15.32　15.32

分别求置信度为 99%和 90%的均值 μ 的置信区间(已知直径的方差为 0.05)。

解：这是一个正态总体均值的区间估计。已知方差为 σ^2，均值为 μ 的 $100(1-\alpha)\%$的置信区间为：

$$\left(\bar{X} - \mu_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + \mu_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)。$$

在 Mathcad 中求解如下：

X:=(14.70　15.21　14.90　14.91　15.32　15.32)，α:=0.01，n:=6，

因为 $\sqrt{0.05}=0.2236$ ，所以 r:=0.2236 ，

$$X^T=\begin{pmatrix}14.7\\15.21\\14.9\\14.91\\15.32\\15.32\end{pmatrix}$$ 这是通过“/view/Toolbars/Math/矩阵按钮图标/转置矩阵按钮 M^T/输入“X”/键盘“=”得出上述 X 的转置矩阵。一般地，Mathcad 系统以列矩阵参加运算。

$$\text{CInormal}(X,\alpha,\sigma):=\left|\begin{array}{l} mu\leftarrow mean(X)\\ (ss\leftarrow\sigma)(N\leftarrow n)\\ t\alpha\leftarrow qnorm(1-\dfrac{\alpha}{2},0,1)\\ \left(mu-t\alpha\cdot\dfrac{ss}{\sqrt{n}}\quad mu+t\alpha\cdot\dfrac{ss}{\sqrt{n}}\right)\end{array}\right.$$

CInormal(X,α,σ)=(14.8249　15.2101),即置信度为 90%的总体均值 μ 的置信区间为(14.8249，15.2101)。

再令 α:=0.10 ，在 Mathcad 中可以算得：　CInormal(X, α , σ)=(14.9099　15.2101)。

 **说明：**

(1) 本题因数据少没有采用内部文件名 diameter.txt 保存矩阵 X,所以 X 没以电子表格形式出现，当然数据矩阵 X 完全可以以矩阵模板中的快捷图标的方式输成 1 行 6 列的矩阵；

(2) α=0.10 时，通过查表计算 μ 值的置信区间为：

$$\left(\bar{x}-\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \bar{x}+\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(15.06-1.64\cdot\sqrt{\frac{0.05}{6}}\ ,\ 15.06+1.64\cdot\sqrt{\frac{0.05}{6}}\ )$$

=(14.91,15.21) ，上述结果比这一传统解法要精确。

例 3　为了检验一种杂交作物的两种新处理方案，在同一地区随机地选择 8 块地段，在各实验地段，按两种方案处理作物，这 8 块地段的单位面积产量(单位：公斤)是：

一号方案产量：86　87　56　93　84　93　75　79；

二号方案产量：80　79　58　91　77　82　74　66。

假设两种方案的产量都服从正态分布，分别为 $N(\mu_1,\sigma^2)$, $N(\mu_2,\sigma^2)$, σ^2 未知，求 $\mu_1-\mu_2$ 和 $\sigma_1{}^2/\sigma_2{}^2$ 的置信度为 95%的置信区间。

解：本题是两个正态总体，已知 $\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$，但其值未知，求期望差、方差比的置信区间。

$\mu_1-\mu_2$ 的 1–α 的置信区间为：

$$(\bar{X}-\bar{\bar{Y}}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_0\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\ \ ,\ \ \bar{X}-\bar{\bar{Y}}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_0\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\ ),$$

其中 $S_0{}^2=\dfrac{(n_1-1)S_1{}^2+(n_2-1)S_2{}^2}{n_1+n_2-2}$，($S_1{}^2$、$S_2{}^2$ 为样本方差)：

方差比 σ_1^2/σ_2^2 的 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left(\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2},\quad \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)。$$

在 Mathcad 中解答如下：

先定义样本数据矩阵：

X:=(86 87 56 93 84 93 75 79)

Y:= (80 79 58 91 77 82 74 66) α:=0.05

(1) $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间：

$$\text{Conf2(X,Y,α)}:=\left|\begin{array}{l}(n1\leftarrow 8)\cdot(n2\leftarrow 8)\cdot(n\leftarrow n1+n2-2)\\ coef\leftarrow\sqrt{\dfrac{1}{n1}+\dfrac{1}{n2}}\\ t\alpha\leftarrow qt\left(1-\dfrac{\alpha}{2},n\right)\\ m\leftarrow mean(X)-mean(Y)\\ std2\leftarrow\dfrac{(n1-1)\cdot Stdev(X)^2+(n2-1)\cdot Stdev(Y)^2}{n}\\ (m-t\alpha\cdot\sqrt{std2}\cdot coef\quad m+t\alpha\sqrt{std2}\cdot coef)\end{array}\right.$$

Conf2(X,Y,α)=(−6.1874 17.6874)，查 f 分布表算得 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为(−6.19，17.69)，且手工计算很繁杂。

(2) σ_1^2/σ_2^2 的置信区间：

$$\text{Confs(X，Y，}\alpha\text{)}:=\left|\begin{array}{l}(n1\leftarrow length(X)-1\quad n2\leftarrow length(Y)-1)\\ s2\leftarrow\dfrac{Stdev(X)^2}{Stdev(Y)^2}\\ \left(f\alpha 2\leftarrow qF\left(\dfrac{\alpha}{2},n1,n2\right)\quad f\alpha 1\leftarrow qF\left(1-\dfrac{\alpha}{2},n1,n2\right)\right)\\ \left(\dfrac{s2}{f\alpha 1}\quad\dfrac{s2}{f\alpha 2}\right)\end{array}\right.$$

$$X:=\begin{pmatrix}86\\87\\56\\93\\84\\93\\75\\79\end{pmatrix}\qquad Y:=\begin{pmatrix}80\\79\\58\\91\\77\\82\\74\\66\end{pmatrix}\qquad \alpha:=0.05$$

所以 Confs(X，Y，α)=(0.2856 7.126)，这就是方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 95%的置信区间。

例 4 糖厂用自动打包机打包，每包标准重量为 100 公斤，每天开工后需检验一次打包机是否能正常工作，某日开工后测 9 包重量(单位：公斤)为：

99.3　98.7　100.5　101.2　98.3　99.7　99.5　102.1　100.5，问在显著性水平 α=0.05 下打包机是否工作正常？已知包重服从正态分布。

解：X:=(99.3　98.7　100.5　101.2　98.3　99.7　99.5 102.1 100.5)^T，

假设 H_0：$\mu=\mu_0$=100；这是总体方差未知的均值假设检验，所以应该用 t 检验，而且是一个双边检验问题。

定义各个参数：μ=100，　α:=0.05，　λ:=0。

通常的否定域记为：$\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$。

建立求解程序：

t_Test(X, μ, α,λ):=

$$\left(n \leftarrow length(X) \quad t \leftarrow \frac{mean(X)-\mu}{Stdev(X)} \cdot \sqrt{n}\right)$$

$(R \leftarrow \text{"Reject Ho"} \quad A \leftarrow \text{"Accept Ho"})$

$if \quad \lambda = 0$

$\quad t\alpha \leftarrow qt\left(1-\dfrac{\alpha}{2},\ n-1\right)$

$\quad R \quad if \quad |t| > t\alpha$

$\quad A \quad otherwise$

$if \quad \lambda = 1$

$\quad t\alpha \leftarrow qt(1-\alpha,\ n-1)$

$\quad R \quad if \quad t > t\alpha$

$\quad A \quad otherwise$

$otherwise$

$\quad z\alpha \leftarrow qt(\alpha,\ n-1)$

$\quad R \quad if \quad t < t\alpha$

$\quad A \quad otherwise$

t_Test(X, μ, α, λ) = “Accept Ho”,粘贴上述程序中的统计量，得：

t:=$\dfrac{mean(X)-\mu}{Stdev(X)} \cdot \sqrt{n}$，t=–0.0449，而临界值为 tα:=qt$\left(1-\dfrac{\alpha}{2}, n-1\right)$，$t\alpha$ =2.5706，未落入否定域，因而接受 Ho，认为打包机工作正常。

F：=dt(tα,n-1)　，　cirt:=(0 F)^T　, k:=0..1。

在图 10.4 上能清楚地看到统计量 t 落在接受域内。

例 5　从两处煤矿各抽样数次，分析其含灰率(%)如下：

甲矿　　24.3　20.8　23.7　21.3　17.4

乙矿　　18.2　16.9　20.2　16.7

假定各煤矿含灰率都服从正态分布,问甲乙两煤矿含灰率的方差有无显著差异?(α=0.05)

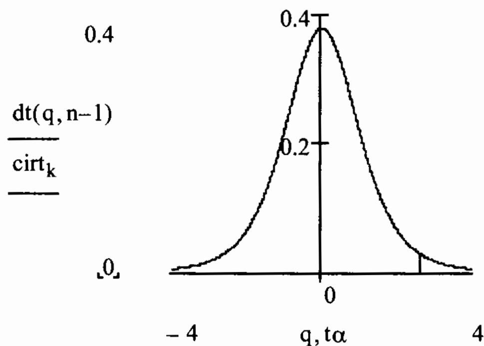


图 10.4 下落区域图

解：本题是两个样本容量不相等的情况下，要求检验两个总体方差的显著性差异。

先定义数据向量：$X:=(24.3 \quad 20.8 \quad 23.7 \quad 21.3 \quad 17.4)^T$

$Y:=(18.2 \quad 16.9 \quad 20.2 \quad 16.7)^T$

假设 Ho ：$\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}$ ，$\alpha:=0.05$ ，使用 F 分布计算统计量 F：$F=\dfrac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}}$ ，

$Var(24.3,20.8,23.7,21.3,17.4)=7.505$ 即：$Var(X)=7.505$；

$Var(18.2,16.9,20.2,16.7)=2.5933$ 即：$Var(Y)=2.5933$；

$$
F_Test(X,Y,\alpha):=\left|\begin{array}{l}
(n1 \leftarrow length(X) \quad n2 \leftarrow length(Y)) \\
\left(f\alpha 1 \leftarrow qF\left(\dfrac{\alpha}{2}, n1-1, n2-1\right) \quad f\alpha 2 \leftarrow qF\left(1-\dfrac{\alpha}{2}, n1-1, n2-1\right)\right) \\
F \leftarrow \dfrac{Var(X)}{Var(Y)} \\
result \leftarrow \text{"Reject Ho"} \quad if\,(F < f\alpha 1)+(F > f\alpha 2) \\
result \leftarrow \text{"Accept Ho"} \quad otherwise \\
\begin{pmatrix} f\alpha 1 & f\alpha 2 \\ F & result \end{pmatrix}
\end{array}\right.
$$

$F_Test(X,Y,\alpha)=\begin{pmatrix} 0.1002 & 15.101 \\ 2.894 & \text{"Accept Ho"} \end{pmatrix}$，Stdev(18.2,16.9,20.2,16.7)=1.6104,即

$\sigma_2=1.6104$，统计量 F 的值为 2.894，此值落在接受域(0.1002,15.101)内,所以接受原假设 Ho，可以认为两个煤矿的含灰率的方差是相等的。

*实验五　回 归 分 析

问题：

一切客观事物的相互关系表现在量上主要有两种类型：一是变量之间存在着完全确定性的关系，例如微积分中的函数关系；另一类是回归关系或相关关系。如果两个变量中的一个变量是人为可以控制的、非随机的，简称控制变量，另一个变量是随机的，而且随着

控制变量的变化而变化，则这两个变量之间的关系就称作回归关系；如果两个变量都是随机的，则它们之间的关系称作相关关系。回归分析和相关分析均为研究两个或两个以上变量之间相关关系的一种统计方法，是最常用的统计方法之一。在建立数学模型时，常需选择其中之一为因变量，而其余的作为自变量，然后根据样本资料，测定研究并自变量与因变量之间的关系。

实验目的：

进一步理解线性回归、多项式回归及非线性回归的概念；熟悉相关的 Mathcad 回归曲线拟合函数、相关系数函数；学会对统计数据进行曲线拟合并对拟合结果进行显著性检验。

实验准备：

理解一元线性回归、多元线性回归的概念；理解相关系数、协方差、回归直线斜率、回归直线截距等统计概念；了解以下 Mathcad 中统计函数的意义和用法：

相关系数函数 Corr(A，B)： 求以数组 *A*、*B* 的数据为样本的相关系数；
协方差函数 cvar(A，B)： 求以数组 *A*、*B* 的数据为样本的协方差；
回归直线斜率函数 slope(vx,vy) ： 求以 *vx* ，*vy* 为样本数据的一元回归直线的斜率；
回归直线截距函数 intercept(vx,vy)： 求以 *vx* ，*vy* 为样本数据的一元回归直线的截距。

实验演示：

1. 一元线性回归分析

在 Mathcad 中可以对变量 x 和 y 的一组观测数据求线性回归方程，并对 x 和 y 的线性回归关系进行检验。由于线性回归问题在任何数理统计教科书中都有介绍，我们只介绍使用 Mathcad 中的统计函数解决线性回归问题的方法。请看下面例子：

例 1　某种合金的强度 y 与其中的含碳量 x 有比较密切的关系，今从生产中收集了一批数据如表 10.4 所示。

表 10.4　合金的强度 y 与其中的含碳量 x 的关系

X(%)	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.20	0.21	0.23
Y(kg/mm^2)	42.0	41.5	45.0	45.5	45.0	47.5	49.0	55.0	50.0	55.0	55.5	60.5

(1) 求 y 对 x 的回归方程；

(2) 在显著水平 α=0.05 下检验回归方程的显著性；

(3) 试预报当合金的含碳量 x 为 0.28 时合金的强度 y(kg/mm^2)。

解：

(1) 先定义数据向量，再作出数据图形，如图 10.5 所示。根据图形我们初步确定 y 与 x 存在线性关系，故本题作为线性回归处理。

$X:=(0.10\quad 0.11\quad 0.12\quad 0.13\quad 0.14\quad 0.15\quad 0.16\quad 0.17\quad 0.18\quad 0.20\quad 0.21\quad 0.23)^T$

$Y:=(42\quad 41.5\quad 45\quad 45.5\quad 45\quad 47.5\quad 49\quad 55\quad 50\quad 55\quad 55.5\quad 60.5)^T$

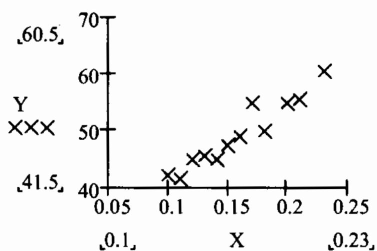


图 10.5 数据图形

求回归系数：截距 a:=intercept(X，Y) a=27.0269；

斜率 b:=slope(X，Y) b=140.6194。

定义回归方程：H(x):= 27.0269+ 140.6194·x。

作出回归方程图形，如图 10.6 所示。

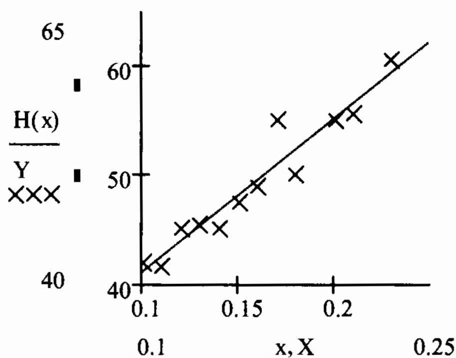


图 10.6 回归方程图形

(2) α :=0.05 时，相关系数为 corr(X，Y)=0.9602。

相关系数几乎接近 1，所以可以认为合金的含碳量 x 与合金的强度 y 之间存在显著的正相关关系，并且这种关系的可信度为 95%。

(3) 下面求合金的含碳量 x=0.28 时，合金的强度 y 的置信度为 95%的预测区间，这个预测区间为：

$$\left(\hat{a}+\hat{b}\cdot x_0 \mp t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\cdot\hat{\sigma}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum(x-\bar{x})^2}}\right)$$

在 Mathcad 中输入：

x0:=0.28 H(x0)=66.4003，n:=length(X) n=12，

$$sq:=\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x0-mean(X))^2}{n\cdot \mathrm{var}(X)}} \quad \alpha:=0.05 \quad t\alpha:=qt\left(1-\frac{\alpha}{2},\ n-2\right) \quad t\alpha=2.2281。$$

回归标准误差为 ：err:=stderr(X，Y) err=1.7634。

所以预测区间的下限和上限分别为 ：

L:=H(x0) – tα·err·sq L=61.0122，

U:=H(x0)+ tα·err·sq U=71.7885。

也就是当合金的含碳量 x=0.28 时，合金的强度 y 的置信度为 95%的预测区间为：

(61.0122，71.7885)(单位：kg/mm²)。

例 2　在第九章实验二中的例题 6 中，我们利用人均收入与支出的数据，由线性方程组的最小二乘解得出了收入与支出之间的“经验公式”，请检验 α=0.05 时，y 与 x 的相关关系。

解：先定义数据向量：

$X:=(1.2\quad 1.4\quad 1.8)^T\quad Y:=(1.6\quad 1.7\quad 2.0)^T\quad n:=1..3\quad \alpha:=0.05$

求协方差及相关系数：cvar(X，Y)=0.0422　　corr(X，Y)=0.9959

求回归系数：

a:=intercept(X，Y)　　a=0.7714

b:= slope (X，Y)　　b=0.6786

所以回归方程为：$\hat{y}=0.7714+0.6786x$。

殊途同归，我们用线性回归与最小二乘法得到了相同的结果。

定义回归直线方程 ：H(x):= 0.7714+0.6786x，　err:=stderr(X，Y)　err = 0.0267

图 10.7 是原始数据图形，我们看到点基本呈直线型排列，所以我们进行线性回归。图 10.8 是回归直线方程，我们看到用线性代数和分析的方法得到的解与用统计方法得到的解非常相近，相关系数为 0.9959 ，说明收入与支出有高度正相关关系。

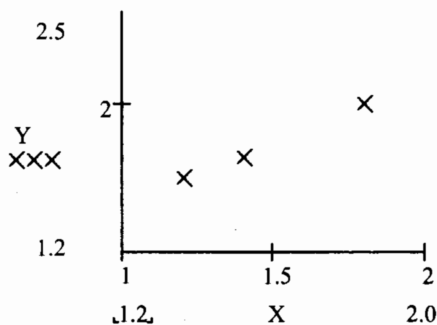


图 10.7　原始数据图形

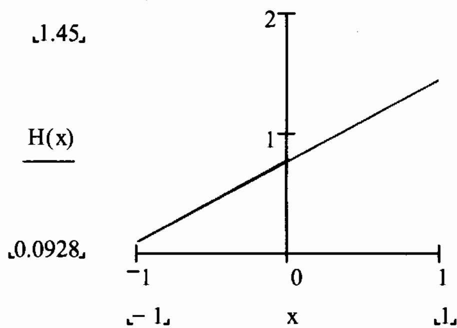


图 10.8　回归直线方程

*2. 多元线性回归

在实际应用中，影响函数 y 的因素不止一个，寻求函数 y 与多个因素之间的线性相关关系是多元回归分析研究的对象。可以想到寻求多元回归分析一般都要涉及更大量的数值计算，用计算机求解多元线性回归分析问题有重要的现实应用意义。我们来看下面的例子：

*例3　上海市服装销售量主要同该城市居民的收入及外来的货币流入量这两个因素有关，1973—1980 年的有关数据如表 10.5 所示。

表 10.5　1973—1980 年的有关数据

年　份	销售量 y（万件）	本市居民收入 x_1(亿元)	外地流入货币 x_2(亿元)
1973	17.7	30.9	5.8
1974	19.8	32.4	8.5
1975	20.6	34.0	9.5
1976	21.3	34.4	11.9
1977	21.3	34.4	11.3
1978	25.1	38.6	13.7
1979	35.3	56.0	13.0
1980	42.4	57.2	16.7

若 1981 年本市居民收入 60 亿元，外地流入货币量 20 亿元，试预测 1981 年上海市的服装销售量。

解：求回归平面方程。

先定义自变量 $x1$，$x2$ 的数据矩阵为 X，函数 y 的矩阵为 Y：

$$X:=\begin{pmatrix}30.9 & 32.4 & 34.0 & 34.4 & 34.4 & 38.6 & 56.0 & 57.2\\ 5.8 & 8.5 & 9.5 & 11.9 & 11.3 & 13.7 & 13.0 & 16.7\end{pmatrix}^T$$

$$Y:=(17.7\quad 19.8\quad 20.6\quad 21.3\quad 21.3\quad 25.1\quad 35.5\quad 42.4)^T$$

N:=rows(X)　N=8　　k:=1　vs:=regress(X，Y，k)

则向量 vs 后面的 3 个元素就是我们要求的二元线性回归方程的系数。利用键盘等号键就可以求出值来了: $vs^T=(3\quad 3\quad 1\quad 0.6985\quad 0.4516\quad -7.3987)$

$$\text{coeff:=submatrix(vs，3，5，0，0)}\qquad \text{coeff}=\begin{pmatrix}0.6985\\0.4516\\-7.3987\end{pmatrix}$$

Fit(x):=interp(vs，X，Y，x)

这就是 Mathcad 求得的回归平面方程，但它无法写成解析写式的形式。函数 Fit(x)的自变量 x 为二维向量，其元素分别表示平面上点的坐标。

回归方程也可以表达为向量的乘法：

$$\text{F(x1,x2):=coeff}\cdot\begin{pmatrix}x1\\x2\\1\end{pmatrix},\quad \text{所以 y=}\begin{pmatrix}0.699\\0.452\\-7.399\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x1\\x2\\1\end{pmatrix}\rightarrow y=-7.399+.699\cdot x1+.452\cdot x2 \qquad (1)$$

(1) 就是要求的二元回归平面方程。

3. 回归平面方程的显著性检验

给出 $x1$,$x2$ 的初值：$x:=\begin{pmatrix}30.9\\5.8\end{pmatrix}$，Fit(x)=16.8053。将原始数据代入 Fit(x)，求出拟合值：

i:=0..N-1　　$predY_i:=Fit\left[\left(X^T\right)^{<i>}\right]$ ；

为了检验回归方程的显著性，设总离差平方和、回归平方和及残差平方和为：

SST:=N·var(Y)　　$SSE:=\sum(predY-Y)^2$　　$SSR:=\sum(predY-mean(Y))^2$

SST=538.3787　　SSE=12.1035　　SSR=526.2753,

按照复相关的定义，$R:=\sqrt{\frac{SSR}{SST}}$，所以 R=0.9887，这说明(1)式求出的 y 与 $x1$，$x2$ 有高度相关关系。

进行 F 法检验，求出 F 统计量和临界值：$F:=\frac{\frac{SSR}{2}}{\frac{SSE}{N-3}}$　　F = 108.7036

α:=0.01　　Fα:=qF(1-α,N-3)　　Fα=13.2739

显然有 $F>F\alpha$，这说明服装销售量与居民收入及外地货币流量之间有显著相关关系，如图 10.9 所示。

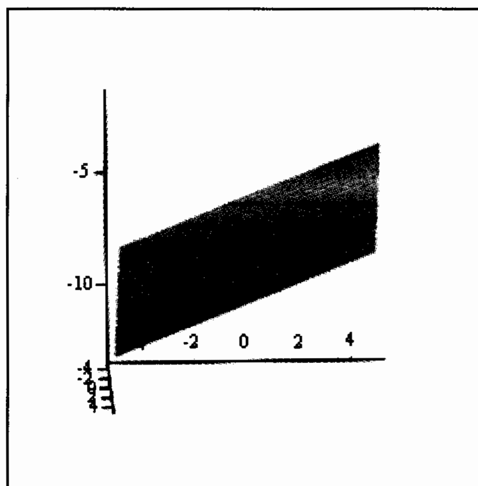


图 10.9　货币流量关系

定义二元函数，作出回归平面方程：f(x1,x2):=-7.399+0.699x1+0.452x2

由于 $f(60,20)=43.581$，所以预测 1981 年服装销量为 43.581(万件)。

实验六 电容器电压值的测定

问题：

在现实世界中，大量现象之间的数量关系并不表现为线性相关关系，这时我们需根据变量变化的具体情况，选用不同的曲线进行拟合，寻求更加符合实际情况的变量间的关系，以达到预测的目的。

实验目的：

学会用 Mathcad 的拟合函数，进行非线性回归和预测，并对结果进行统计分析。

实验准备：

理解回归方程显著性检验、相关系数、相关分析、拟合标准差等概念；熟悉以下 Mathcad 中拟合函数的意义和用法：

genfit：广义拟合函数，可以对任意曲线进行拟合；

expfit：指数函数拟合函数；

pwrfit：幂函数拟合函数。

实验演示：

现有如下问题：电容器充电达到 100 伏时作为时间的计算原点，此后电容器串联一个电阻放电，测得各时刻的电压值 V 的数据如表 10.6 所示。

表 10.6 电压值 V 的数据表

T(秒)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V(伏)	100	78	52	44	35	20	14	11	8	5	5

试求电压值 V 对于时间 T 的回归方程。

解：首先定义数据向量

$T=(0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ )^T$

$V=(100\ 78\ 52\ 44\ 35\ 20\ 14\ 11\ 8\ 5\ 5\ )^T$

为了确定拟合曲线的类型,作出散点图，如图 10.10 所示。

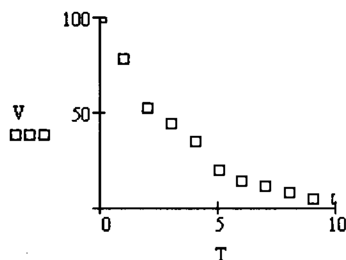


图 10.10 电压随时间变化的散点图

我们应该想到图像中表示的 V 与 T 的关系可能为负指数函数关系，因此我们使用指数函数拟合函数 expfit(*vx*,*vy*,*vg*)求拟合曲线 ：$y=a\cdot e^{bx}+c$ ，expfit 函数中 *vg* 为指数函数曲线参数的猜测值向量，或称为初始值向量，所以不妨设

$$\text{Guess}:=\begin{pmatrix}90\\-0.02\\0\end{pmatrix}$$

调用函数 expfit(*vx*,*vy*,*vg*)，定义：　E:=expfit(T,V,Guess),$E=\begin{pmatrix}103.86367559\\-0.27981167\\-3.08579229\end{pmatrix}$

为了计算 E，在"E"后输入键盘上的等号"="，Mathcad 就自动算出上述结果。 可以看出 E 为拟合的指数曲线参数的估计值向量，拟合的回归曲线方程为：

$H(T):=E_0\cdot e^{E_1 T}+E_2$　即 $H(T):=103.86367559\cdot e^{-0.27981167T}-3.08579229$，

相关系数为：$corr\left(\overrightarrow{H(T)},V\right)=0.99690677$ 。

可见拟合效果是非常显著的，拟合的标准误差为：

$n:=\sqrt{\dfrac{\sum\overrightarrow{(H(T)-V)^2}}{n-2}}=2.64579596$，作出的图像如下图 10.11 所示。

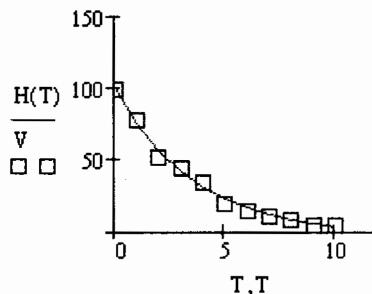


图 10.11　拟合曲线图像

这个标准差还是大了一些，再继续给出参数的猜测值，以缩小标准差。经多次实验,给出 Guess 矩阵如下猜测值：$\text{Guess}:=\begin{pmatrix}80\\-1\\0\end{pmatrix}$　　E:=expfit(T,V,Guess)　$E=\begin{pmatrix}103.86382607\\-0.27980902\\-3.08609944\end{pmatrix}$

N:=11　$H(T):=E_0\cdot e^{E_1 T}+E_2$　　$corr\left(\overrightarrow{H(T)},V\right)=0.99690677$

再次调整拟合曲线的参数 E 后，作出拟合曲线与原始数据点图形如图 10.12 所示，并得出要求的回归方程为：

$H(T):=103.86382607\cdot e^{(-0.27980902\cdot T)}-3.08609944$

H(T) =

	0
0	100.77772663
1	75.42748454
2	56.26452438
3	41.77870445
4	30.82846621
5	22.5508735
6	16.29360863
7	11.56356633
8	7.98799447
9	5.28511925
10	3.24193994

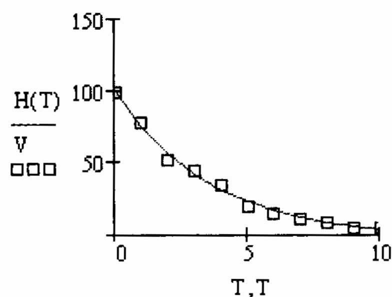


图 10.12 调整参数后的拟合曲线图

习 题 十

1. 10 把钥匙中有 3 把能打开门，今任取两把，求能打开门的概率。
2. 100 个产品中有 3 个次品，任取 5 个，求其中次品数分别为 1、2、3 的概率。
3. 一个袋内有 5 个红球，3 个白球，2 个黑球，计算任取 3 个球恰为一红、一白、一黑的概率。
4. 有两个口袋，甲袋中装有两个白球、一个黑球，乙袋中装有一个白球、两个黑球。由甲袋中任取一个球放入乙袋，再从乙袋中取出一个球，求取到白球的概率。
5. 从厂外打电话给这个工厂某一车间要由工厂的总机转进，若总机打通的概率为 0.6，车间的分机占线率为 0.3，假定二者是独立的，求从厂外向该车间打电话能打通的概率。
6. 工一个产品要经过三道工序，第一、二、三道工序不出废品的概率分别为 0.9、0.95、0.8，若假定各工序是否出废品为独立的,求经过三道工序而不出废品的概率。
7. 一个自动报警器由雷达和计算机两部分组成，两部分有任何一个失灵，这个报警器就失灵。若使用 100 小时后，雷达部分失灵的概率为 0.1，计算机失灵的概率为 0.3。若两部分失灵与否是独立的，求这个报警器使用 100 小时而不失灵的概率。
8. 3 人分别独立去破译一个密码，他们能译出的概率分别是 1/5、1/3、1/4，问能将此密码译出的概率是多少？

9. 某机构有一个 9 人组成的顾问小组，若每个顾问贡献正确意见的百分比是 0.7，现在该机构对某事可行与否个别地征求各位顾问意见，并按多数人意见作出决策，求作出正确决策的概率。
10. 连续型随机变量ξ 的概率密度为：

$$\varphi(x)=\begin{cases}kx^a\text{，} & 0<x<1\\ 0\text{ ，} & \text{其他}\quad(k,a>0)\end{cases}$$

又知 $E\xi$=0.75，求 k 和 a 的值。
11. 一个螺丝钉的质量是随机变量，期望值为 10g，标准差为 1g 。100 个一盒的同型号螺丝钉重量的期望值和标准差各为多少？(假设每个螺丝钉的重量都不受其他螺丝钉重量的影响)
12. 已知 100 个产品中有 10 个次品，求任意取出的 5 个产品中次品数的期望值。
13. 某灯泡厂某天生产了一大批灯泡，从中抽取 10 个进行寿命实验，得数据如下(单位：小时)：

1050　　1100　　1080　　1120　　1200

1250　　1040　　1130　　1300　　1200

问该天生产的灯泡平均寿命大约是多少？如果知道该天生产的灯泡寿命的方差是 8，试找出灯泡平均寿命的置信区间；若灯泡寿命服从正态分布$\xi\sim N(\mu,8)$，试估计平均寿命所在的范围(α=0.05)。
14. 已知某炼铁厂的铁水含碳量在正常生产情况下服从正态分布，其方差为 $6^2=0.108^2$。现在测定了 9 炉铁水，其平均含碳量为 4.484。按此资料计算该厂铁水平均含碳量的置信区间，并要求有 95%的可靠性。
15. 假定新生婴儿(男孩)的体重服从正态分布，随机抽取 12 名新生婴儿，测其体重为 3100，2520，3000，3000，3600，3160，3560，3320，2880，2600，3400，2540。试以 95%的置信系数估计新生男婴儿的平均体重(单位 g)。
16. 假定某厂生产一种钢索，它的断裂强度 ξ(kg/cm^2)服从正态分布 $N(\mu，40^2)$。从中选取一个容量为 9 的样本，得 μ_x=780kg/cm^2。能否据此样本认为这批钢索的断裂强度为 800kg/cm^2? (α=0.05)
17. 某炼铁厂的铁水含碳量 ξ 在正常情况下服从正态分布。现对操作工艺进行了某些改进，从中抽取 5 炉铁水测得含碳量数据如下：

4.421　　4.052　　4.357　　4.287　　4.683

据此是否可以认为新工艺炼出的铁水含碳量的方差为 0.108^2？ (α=0.05)
18. 从两处煤矿各抽样数次，分析其含灰率(%)如下：

甲矿　　24.3　　20.8　　23.7　　21.3　　17.4

乙矿　　18.2　　16.9　　20.2　　16.7

假定各煤矿含灰率都服从正态分布，问甲、乙两煤矿的含灰率有无显著差异？(α=0.05)
19. 从刚生产出来的一大批滚珠中随机地抽出 16 个，测得它们的直径 X(mm)的数值如下：

25.3 25.2 24.9 25.0 25.0 25.1 24.8 25.2 24.9 24.9 25.1 25.1 24.7
24.8 25.2 25.0

假定滚珠直径 X 服从正态分布，

(1) 已知标准差 σ=0.16 的情况下，求总体均值μ的 95%的置信区间；

(2) 标准差 σ 未知的情况下，求总体均值μ的 95%的置信区间；

(3) 调用程序 Clnorm 求总体均值μ和方差 σ^2 的 95%的置信区间。

20. 随机地从 A、B 两批导线中分别抽出 4 根和 5 根，测量它们的电阻(单位：欧姆)，测量结果列于数据向量 X 和 Y 中，设两批导线的电阻皆服从正态分布，方差相等且两总体相互独立。试求这两批导线电阻均值差的 95%的置信区间。

X=(0.143, 0.142, 0.143, 0.137)，Y=(0.140, 0.142, 0.136, 0.138, 0.140)
α=0.05。

21. 设从某地区的成年人中随机地抽出男女各 40 人，测量他们的体重(单位：公斤)，测量数据存放在下面的表格中。如果将成年男子和成年女子的体重视为二个独立的正态总体，试求它们的均值差的 99%的置信区间。

女子=(49.58, 53.05, 51.58, …)，

男子=(51.45, 67.68, 49.45,…)。

22. 某种灯泡的平均寿命按国家标准规定为$\mu_0 \geq 2000$(小时)，从一批成品中抽查了 10 只，测得寿命的检测值如下：

2012 2069 1694 2018 2051 2034 1979 2036 1986 2009

假定此种灯泡的寿命服从正态分布，试问这批灯泡是否合格？(α=0.05)

23. 从机械厂的两台机器所加工的同一种零件中，分布抽出 10 个和 9 个样品，测量其尺寸，所得数据如下(单位：厘米)：

甲机床	6.25	5.78	6.45	6.00	5.88	5.76	6.00	5.85	5.94	5.79
乙机床	6.08	6.25	5.94	5.94	5.79	6.03	5.85	6.10	5.93	

已知两台机器加工的零件尺寸均服从正态分布，它们的方差分别为 σ_1^2=0.4，σ_2^2=0.2，取 α=0.05，试问两台机床生产的零件尺寸的均值有无显著差异？

附录 A　软件命令简介

Mathcad 菜单命令简介

1. View(视图)菜单

Toolbars：该菜单项的级联菜单中有各个工具栏的显示/隐藏控制。

Standard：标准工具栏显示开关。

Formatting：格式工具栏显示开关。

Math：数学计算工具栏显示开关。

Graph：绘图工具栏显示开关。

Matrix：矩阵工具栏显示开关，是数学工具栏中的工具板。

Calculus：微积分工具栏显示开关，是数学工具栏中的工具板。

Boolean：布尔运算符工具栏显示开关，是数学工具栏中的工具板。

Symbolic：符号计算工具栏显示开关，是数学工具栏中的工具板。

2. Insert(插入)菜单

X-Y Plot：快捷键为@，创建二维平面直角坐标图。

Polar Plot：快捷键为 Ctrl+7，创建二维极坐标图。

3D Plot Wizard…：快捷键为！创建三维图形，打开对话框，采用交互式创建三维图形。

Surface Plot：快捷键为 Ctrl+2，创建三维曲面图。

Contour Plot：快捷键为 Ctrl+5，创建等值曲线图。

3D Scatter Plot：创建三维散点图。

3D Bar Plot：创建三维直方图。

Vector Field Plot：创建矢量图。

Matrix…：快捷键为 Ctrl+M，插入一个矩阵，选择此项会打开一个对话框 ，在其中选择插入矩阵的行列数。

3. Format(格式)菜单

Equation…：控制公式的格式，包括公式的字体和颜色的设置。

Result…：控制结果的显示方式，可以定义包括有效数字，结果形式等内容。

Text…：控制文本的格式，设置选中文本文字的字体、颜色和大小等。

Paragraph…：控制段落属性，设置文本中段落格式方面的各种属性。

Tabs…：控制 Tab 停止位，也就是文本编辑时，Tab 键的停止位置。

Style…：控制文本风格。

Properties：属性设置，包括数学编辑和文本编辑的属性，但对两者的设置有差别。

Graph:格式化各图形。

X-Y Plot…：打开设置平面直角坐标图形对话框。

Polar Plot…：打开设置极坐标图形对话框。

3D Plot…：打开设置三维图形对话框。

Trace…：打开读取图形中的坐标对话框。

Zoom…：打开局部进行放大的对话框。

Color:设置颜色。

Backgroud…：设置背景颜色。

Highlight…：设置高度显示区的颜色。

Annotation…：设置高度显示电子书中修改过的内容。

Use Default Palette：使用默认的 256 色调色板。

Optimize Palette：优化调色板。

4. Math(数学)菜单

Calculate：快捷键为 F9，进行计算，更新视图中公式的计算结果以及图形显示。

Calculate Worksheet：进行计算，更新整个工作单中公式的计算结果以及图形显示。

Automatic Calculation：自动计算模式开关，选择是否采用自动计算模式。该模式在制作动画时是必需的。

Optimization：优化计算开关。

Options…：打开数学设置对话框，可以设置系统变量、单位制和量纲等。

5. Symbolics(符号运算) 菜单

Evaluate：该菜单项包含以下子菜单。

Symbolically：快捷键为 Shift+F9，进行符号运算。

Floating Point…：进行符号运算，如果可能，带回浮点类型的结果。

Complex：进行符号运算，可能的话，带回复数的结果。

Simplify：简化代数表达式，利用基本的代数运算技巧，如合并类项等，简化代数式。

Expand：展开代数式。

Factor：进行因式分解。

Collect：整理多项式，按选定的代数符号进行整理。

Polynomial Coefficients：求多项式展开系数。

Variable：解方程。对选定的变量求解方程，结果也是代数形式。

Substitute：替代，用剪贴板中或指定的内容替代指定变量。

Differentiate：求微分，指定一个变量，以其他变量为常数求微分。

Integrade：求积分，指定一个变量，以其他变量为常数求表达式的积分。

Expand to Series…：泰勒展开，对选定的表达式进行泰勒展开。

Covert to Partial Fraction：展开表达式为部分分式，在可行的情况下进行。

Transpose：求矩阵的转置。

Invert：求矩阵的逆。

Determinant：求矩阵的行列式值。

Transform：进行各种变换。

Fourier：进行傅里叶变换。

Inverse Fourier：进行傅里叶逆变换。
Laplace：进行拉普拉斯变换。
Inverse Laplace：进行拉普拉斯逆变换。
Z：进行 Z 变换。
Inverse Z：进行逆 Z 变换。
Evaluation Style…：设置运算形式。

6. Math Toolbar(数学工具栏)

Calculatir Toolbar (计数器工具板)
Graph Toolbar (作图工具板)
Matrix Toolbar (矩阵工具板)
Evaluation Toolbar (求值工具板)
Calculus Toolbar(微积分工具板)
Boolean Toolbar (运算符工具板)
Programming Toolbar (程序工具板)
Greek Toolbar (希腊字母工具板)
Symbolic Toolbar (符号运算工具板)

Maple 绘图命令简介

7. 基本的二维绘图指令

plot(f(x),x=xmin..xmax) 从 xmin 至 xmax 画出 f(x)的函数图
plot(f(x),x=xmin..xmax,y=ymin..ymax) 画出 f(x)的函数图，同时指定 y 方向的绘图范围
plot([f1(x),f2(x),f3(x),…],x=xmin..xmax) 同时画出多个函数图
plot(f(x),x=xmin..xmax,options) 加入选项来更改绘图指令的默认值
plot([x(t),y(t),t=tmin..tmax]) t 从 tmin 至 tmax 做二维参数绘图
plot([x(t),y(t),t=tmin..tmax],xmin..xmax,ymin..ymax)
指定二维参数绘图的范围，x 方向从 xmin 到 xmax，y 方向从 ymin 到 ymax
plot([x(t),y(t),t=tmin..tmax],scaling=CONSTRAINED)
保持曲线的“真正形状”，即 x、y 坐标的比为 1:1
plot([[x1(t),y1(t),t1=t1min..t1max],
[x2(t),y2(t),t2=t2min..t2max],…]) 同时画出多个参数图

8. 数据点绘图

plot([[x1,y1],[x2,y2],[x3,y3],…],style=point)
二维数据点绘图
plot([[x1,y1],[x2,y2],[x3,y3],…])
二维数据点绘图，数据点会以直线连接起来
plot(f(t),t=tmin..tmax,coords=polar)
从 tmin 至 tmax 画出 r=f(t)的极坐标图
plot([f(t),g(t),…],t=tmin..tmax, coords=polar)

从 tmin 至 tmax 同时画出多个函数的极坐标图

9. 基本的三维绘图指令

plot3d(f(x,y),x=xmin..xmax，y=ymin..ymax)
x 从 xmin 至 xmax，y 从 ymin 至 ymax 画出 f(x,y)的函数图

plot3d({f(x,y),g(x,y),h(x,y),…},x=xmin..xmax，y=ymin..ymax)
同时画出多个函数图

plot3d(f(x,y),x=xmin..xmax，y=ymin..ymax,options)
加入选项来更改绘图指令的默认值

10. 三维参数绘图

plot3d([fx,fy,fz],t=tmin..tmax，u=umin..umax)
画出三维的曲面参数图

plot3d([fx,fy,fz],t=tmin..tmax，u=umin..umax,options)
画出三维的曲面参数图，并加入选项

11. 显示与合并所绘的图形

display(g,options) 显示绘图 g
display({g1,g2,…},options) 显示合并几张函数图后所形成的那张新图

12. 把绘图选项变成默认值

setoptions(options) 设定二维绘图选项的默认值
setoptions3d(options) 显示合并几张函数图后所形成的一张新图

13. 不等式绘图

inequal(ineqs,x=xmin..xmax,y=ymin..ymax,options)
绘制由线性不等式所定义而形成的图形

14. 数据点的绘图

pointplot([[x1,y1],[x2,y2],…],options) 在二维平面绘点
pointplot3d([[x1,y1,z1],[x2,y2,z2],…],options) 在三维空间绘点

15. 空间曲线绘图

spacecurve([[x(t),y(t),z(t),t=t0..t1,options],…])
空间曲线绘图，但每条曲线使用不同的选项及参数 t 的范围

spacecurve([[x(t),y(t),z(t)],…],t=t0..t1,options)
空间曲线绘图，但每条曲线使用不同的选项及参数 t 的范围

16. 极坐标、圆柱坐标与球面坐标绘图

polarplot(f(t),t=tmin..tmax,options)
从 tmin 至 tmax 画出 r=f(t)的极坐标图，并加入选项

17. 隐函数绘图

implicitplot(f(x,y)=c,x=x1..x2,y=y1..y2, options)
在指定的范围内，画出 f(x,y)=c 的二维的隐函数绘图，并加入选项
implicitplot(f(x,y,z)=c,x=x1..x2,y=y1..y2,z=z1..z2,options)
在指定的范围内，画出 f(x,y,z)=c 的三维的隐函数绘图，并加入选项

18. plot()指令选项，如附录 A.1 所示。

附录 A.1 plot()指令选项表

选 项	说 明	用 法
axes	设定坐标轴的显示方式	您可以设定 axes 为 FRAME(坐标轴在图形的左边与下面)、BOXED(坐标轴围绕图形)、NORMAL(以一般方式显示)或 NONE(不显示坐标轴)
color	设定图形所要涂的颜色	您可以用 COLOR()来设定颜色，或是直接取用 Maple 所提供的颜色常数。如 color=COLOR(RGB,0,0,1) 或是设定 color=blue 均是设定绘图的颜色为蓝色。您可以键入?plot[color]来查询更多的信息
coords	设定绘图时所使用的坐标系	Plot()指令默认的坐标系为 cartesian(直角坐标系)。此外，常用的坐标系有 logarithmic(对数坐标系)与 polar(极坐标系)等等。您可以键入?plot[coords]来查询更多的信息
discont	设定函数在不连续处是否要用线段连接起来	设定 discont=true 则不连接，plot()的默认值为 discont=false
labels	设定坐标轴的名称	设定方式为 labels=[x,y]，其中 x 与 y 分别为 x 与 y 坐标轴的名称。坐标轴的名称必须为字符串的形式。如果没有设定坐标轴的名称，则默认的名称为所绘变量的名称
linestyle	设定所绘线条的线型	linestyle=1 为实线(默认值)，linestyle=2 则以点(dot)来表示线条，linestyle=3 为虚线，linestyle=4 则为虚线与点的交错
numpoints	设定产生一个函数图所需的最少样点数	默认值为 numpoints=50。当您所绘出来的图形不平滑，或是有失真的情况时，可以加大 numpoints 的值来改善图形
scaling	x 与 y 轴比例的设定	设 scaling=constrained 则 x 与 y 轴尺度的比例为 1:1，设 scaling=unconstrained 则比值可随意更改。默认值为 scaling=unconstrained
style	设定图形的显示样式	有 LINE、POINT、PATCH 和 PATCHNOGRID 几项可供选择。默认值为 LINE，即相邻两点以线段连接起来。设 style=POINT 则仅显示点。PATCH 与 PATCHNOGRID 则用在包含有多边形的图形中。设 style=PATCH 会显示多边形的颜色与边线，选择 PATCHNOGRID 则仅显示色彩，而不显示多边形的边界

续表

选　项	说　明	用　法
symbol	设定点的格式	若设 style=POINT，则可以利用 symbol 选项来设定点的格式。symbol 选项有 BOX(方块)、CROSS(十字)、CIRCLE(圆形)、POINT(点)和 DIAMOND(菱形)几项可供选择
thickness	设定线条的粗细	您可以设定 thickness 等于 0、1、2 或 3。数值越大线条越粗。thickness 的默认值为 0
tickmarks	设定坐标轴刻度的数目	设定 tickmarks=[m,n]，则 x 轴的刻度数目至少为 m，而 y 轴的刻度数目至少为 n。设为 0 则不显示任何刻度。m 与 n 必须为正整数或 default。设定 default 则 Maple 用默认值来取坐标轴的刻度数目。如果只要设定 x 轴或 y 轴的刻度数目，则您可以只更改 xtickmarks 或 ytickmarks 选项
title	图形的标题名称	标题名称必须为一字符串，而 title 的默认值是不显示任何名称
view	设定显示图形的范围	设 view=[xmin..xmax,ymin..ymax]，则 x 方向的绘图范围从 xmin 至 xmax，y 从 ymin 至 ymax。默认值为全部的曲线均显示出来
xtickmarks ytickmarks	设定坐标轴刻度的数目	设定 xtickmarks=m 则 x 轴的刻度数目至少为 m，设 0 则不显示任何刻度，若 m 为一个数字所组成的串行，则 x 轴会依这数字来显示。ytickmarks 的用法同 xtickmarks

Maple 所提供的颜色常数，如附录 A.2 所示。

附录 A.2　Maple 所提供的颜色常数

aquamarine	海洋绿	black	黑色	blue	蓝色
brown	棕色	coral	桃红色	cyan	亮蓝色
gold	金色	green	绿色	gray	灰色
khaki	卡其色	magenta	紫色	maroon	深红褐色
navy	深蓝	orange	橙色	pink	粉红色
plum	深紫色	red	红色	sienna	浓黄色
Tan	茶色	turquoise	天蓝色	violet	紫罗兰色
wheat	麦草色	white	白色	yellow	黄色

Plot3d()指令选项，如附录 A.3 所示。

附录 A.3　Plot3d()指令选项

选　项	说　明	用　法
axes	设定坐标轴的显示方式	您可以设定 axes 为 FRAME(坐标轴为图形的 3 个外边)、BOXED(坐标轴围绕图形)、NORMAL(以一般方式显示)或 NONE(不显示坐标轴)。默认值为 NONE
color	设定图形所用的颜色	您可以用 COLOR()来设定颜色，或是直接取用 Maple 所提供的颜色常数。除此之外，也可以用颜色函数(color function)来选色

续表

选 项	说 明	用 法
contours	设定等高线的数目，或是设定等高线的值	若设 contours=n,n 为一整数，则设定三维函数等高线的数目为 n。若 n 为一串行，则指定等高线的值为串行内元素的值
coords	指定绘图时所使用的坐标轴系统	Plot3d()指令默认的坐标系为 rectangular(直角坐标系)。常用的三维坐标系有 spherical (球面坐标)与 cylindrical (柱面坐标)等等。您可以键入？plot3d[coords]来查询更多的信息
Grid	设定曲面是由多少个样点所组成的	grid=[m,n]设定曲面在一坐标轴方向 m 个等距样点，在另一个坐标轴方向取 n 个等距样点来绘图
gridstyle	设定网格的形状	设定 gridstyle=rectangular 则使用方形网格，设定 gridstyle=triangular 则使用三角形网格
labels	设定坐标轴的名称	设定方式为 labels=[x,y,z]，其中 x、y 与 z 分别为 x、y 与 z 坐标轴的名称。坐标轴的名称必须为字符串的形式。如果没有设定坐标轴的名称，则默认的名称为所绘变量的名称。
linestyle	设定所绘线条的类型	linestyle=1 为实线(默认值)，linestyle=2 则以点(dot)来表示，linestyle=3 为虚线，linestyle=4 则为虚线与点的交错
numpoints	设定产生一个三维函数图形时所需的最少的样点	默认值为 numpoints=625(625=25^2)点。当您所绘出来的图形不平滑，或是三维函数较复杂而无法表示其细微处的结构时，可以加大 numpoints 的值来改善图形。Plot3d()会取 numpoints 开根号所得的值作为每一个坐标轴方向的样点来绘图
projection	设定投影的模式	projection=a 为设定投影的模式，其中 a 的值必须介于 0 与 1 之间。1 代表等角投影，而 0 代表广角投影。默认值为等角投影
scaling	x、y 与 z 轴比例的设定	设 scaling=CONSTRAINED 则 x、y 与 z 轴尺度的比例为 1：1：1，设 scaling=UNCONSTRAINED 则比例可随意更改。默认值为 scaling=UNCONSTRAINED
shading	设定曲面着色的方式	默认值为 shading=XYZ。此外，您也可以选择 XY、Z、ZGREYSCALE、ZHUE 与 NONE 等着色方式
style	设定图形的显示样式	三维图形的 style 选项有 POINT、HIDDEN、PATCH、PATCH-CONTOUR、WIREFRAME、CONTOUR 与 PATCHNOGRID 等。默认值为 PATCH，即每一小网格以颜色填满，并且显示边界
symbol	设定点的格式	若设 style=POINT,则可以利用 symbol 选项来设定点的格式。Symbol 选项有 BOX(方块)、CROSS(十字)、CIRCLE(圆形)、POINT(点)和 DIAMOND(菱形)等
thickeness	设定线条的粗细	您可以设定 thickness 等于 0、1、2 或 3。数值越大代表线条越粗。Thickness 的默认值为 0
tickmarks	设定坐标轴刻度的数目	设定 tickmarks=[k,m,n] 则 x 轴的刻度数目至少为 k，而 y 轴的刻度数目至少为 m，而 z 轴的刻度数目至少为 n。设 0 则不显示任何刻度。k、m 与 n 必须为正整数或 default。设定 tickmarks=default 则 Maple 用默认值来取坐标轴的刻度数目

续表

选　项	说　明	用　法
title	图形的标题名称	标题名称必须为一字符串，而 title 的默认值是不显示任何名称
view	设定显示图形的范围	如果设定 view=zmin..zmax, 则限制 z 方向的绘图范围从 zmin 至 zmax。设定 view=[xmin..xmax,ymin..ymax,zmin..zmax],则依设定的范围来显示图形。默认值为全部曲面均显示出来

irem(m,n): 计算 m/n 的整数余数，其中 m,n 必须为整数；
irem(m,n,'q'): 计算 m/n 的整数余数,并将商存在变量 q 中；
iquo(m,n): 计算 m/n 的整数商，其中 m,n 必须为整数；
iquo(m,n,'r'): 计算 m/n 的整数商，并将余数存在变量 r 中；
rand(): 产生 12 个位数的随机整数；
slope(pt1,pt2) 计算两点连线的斜率；
middlebox(f(x),x=a..b,n,options) 绘出中点接合矩形来逼近定积分；
middlesum(f(x),x=a..b,n, options) 求出中点接合矩形的面积总和；

MATLAB 最优化工具箱

1. 极小化函数

fgoalattain 求解多目标规划的优化问题；
fmin 求解单变量函数的极小值；
fminbnd 求解边界约束条件下的非线性极小值；
fmincon 求解约束条件下的非线性极小值；
fminimax 求解最小最大极值；
fminsearch 求解无约束条件下的非线性极小值；
fminunc 求解多变量函数的极小值；
linprog 求解线性规划问题。

2. 方程求解函数

fsolve 求解非线性方程；
fzero 求解标量非线性方程。

3. 最小二乘优化函数

Isqlin 求解约束条件的线性最小平方问题；
Isqcurvefit 求解非线性曲线拟合问题；
Isqnonlin 求解非线性最小平方问题。

4. 无约束非线性规划

Fminunc 求解多变量无约束函数的最小值；
Fminsearch 求解多变量无约束函数的最小值。